Zusammenfassung Graphentheorie

Diskrete Strukturen II

Quellen sind Diestels *Graphentheorie* und Wikipedia

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Definitionen

Ein Graph $G(V, E)$ ist ein Paar zweier disjunkter Mengen. V ist die Menge der Knoten und E, bestehend aus zwei-elementigen Teilmengen von V, symbolisiert die Kanten. Seien v_1, v_2, ... Knoten von G und e_1, e_2, ... Kanten. Sei G_{dj} ein zu $G(V_{dj}, E_{dj})$ disjunkter Graph.

Ordnung von G	$\lvert V(G)\rvert = \lvert G\rvert$
Kantenzahl von G	$\lvert E(G)\rvert = \lvert\lvert G\rvert\rvert$
e_1 inzident v_1	$\Leftrightarrow v_1 \in e_1$
$E(v_1)$	Die Menge aller mit v_1 inzidenten Kanten.
v_1 adjazent v_2	$\Leftrightarrow v_1 v_2 \in E$
Vollständiger Graph K^n	$\Leftrightarrow \lvert K^n\rvert = n \wedge \lvert\lvert K^n\rvert\rvert = \binom{n}{2}$
Teilgraph: $G' \subseteq G$	$\Leftrightarrow V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$ (G' *spannt* G *auf*, wenn $V' = V$ gilt.)
Untergraph / induziert: $G' = G[V']$	$\Leftrightarrow V' \subseteq V \wedge E' = \{v_1 v_2 \in E : v_1 \in V' \wedge v_2 \in V'\}$
$G' = G - H$	$\Leftrightarrow V' = V \wedge E' = E - E(H)$ (wenn H Kantenmenge) $\Leftrightarrow V' = V - V(H) \wedge E' = E$ (wenn H Knotenmenge) $\equiv G - v_1$ bzw. $G - e_1$ (wenn H ein-elementig)
Nachbarn von v_1	$N(v_1) = \{v_2 \in V : v_1 v_2 \in E\}$
Grad von v_1	$d(v_1) = \lvert N(v_1)\rvert$ (v_1 heißt *isoliert*, wenn $d(v_1) = 0$)
Minimalgrad von G	$\delta(G) = min\{d(v_1) : v_1 \in V\}$
Maximalgrad von G	$\Delta(G) = max\{d(v_1) : v_1 \in V\}$
G ist k-regulär	$\Leftrightarrow \Delta(G) = \delta(G) = k$ (oder: $d(v_1) = k,\ \forall v_1 \in V$)
Durchschnittsgrad von G	$d(G) = \frac{d(v_1)+...+d(v_{\lvert V\rvert})}{\lvert V\rvert}$ ($\epsilon(G) = \frac{1}{2} \cdot d(G) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert V\rvert}$)
$\overline{G}$ ist Komplement von G	$\Leftrightarrow V(\overline{G}) = V \wedge E(\overline{G}) = \{e_1 \in [V]^2 : e_1 \notin E\}$
Kantengraph L(G)	Jede Kante aus E wird zum Knoten. Zwei Knoten sind genau dann benachbart, wenn es ihre Kanten waren.
$G' = G * G_{dj}$	$\Leftrightarrow V' = V \cup V_{dj} \wedge E' = E \cup E_{dj} \cup \{v_1 v_2 : v_1 \in V \wedge v_2 \in V_{dj}\}$

1.2 Sätze

Proposition 0.2.1. Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades in G ist stets gerade.

2 Wege und Kreise

2.1 Definitionen

Ein Weg ist ein nicht leerer Graph $P^k(V_P, E_P)$ mit $V_P = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ und $E_P = \{v_1v_2, v_2v_3, v_{k-1}v_k\}$. Abkürzend bezeichnet man einen Weg von v_1 nach v_k mit $P = v_1v_2...v_k$.
Seien A und B Eckenmengen.

$\boxed{Pv_k}$	Der Weg endet beim Knoten v_k. (analog v_1P und v_1Pv_k)
$\boxed{P\mathring{v}_k}$	P ohne Endknoten v_k (selben Analogien)
P^k ist ein A-B-Weg	$\Leftrightarrow V(P) \cap A = \{v_1\} \wedge V(P) \cap B = \{v_k\}$ (auch a-b-Weg, wenn $\lvert A\rvert = \lvert B\rvert = 1$)
P^k ist ein H-Weg	$\Leftrightarrow V(P) \cap H = \{v_1, v_k\}$ (auch h-Weg, wenn $\lvert H\rvert = 1$)
P_1^k und P_2^k sind kreuzungsfrei	$\Leftrightarrow \mathring{v}_1P_1\mathring{v}_k \;\cap\; \mathring{w}_1P_2\mathring{w}_k = \emptyset$
Abstand zwischen A und B	Geringste Länge eines A-B-Weges. (∞, wenn es keinen gibt)
Abstand zwischen v_1 und v_2	$d_G(v_1, v_2)$ ist der Abstand zwischen $\{v_1\}$ und $\{v_2\}$.
Durchmesser von G	$diam(G) = max\{d_G(v_1, v_2) : \{v_1, v_2\} \subseteq V\}$
v_1 ist zentral in G	$\Leftrightarrow$ Der Abstand von v_1 zum entferntesten Knoten in G ist minimal.
Radius von G	Sei v_1 zentral in G, dann ist $rad(G) = max(d_G(v_1, \{v_2 \in V\}))$

Als Kreis C^k mit $k > 2$ bezeichnen wir einen Weg $v_1...v_{k-1}$ erweitert um die Kante v_kv_1. C^k besitzt also eine zyklische Eckenfolge der Länge k.

Taillenweite von G	$g(G)$ ist die Länge des kürzesten Kreises in G. ($g(G) = \infty \Leftrightarrow$ G kreisfrei)
Umfang von G	Länge des längsten Kreises. (0, wenn G kreisfrei)
v_1v_2 ist Sehne von G	$\Leftrightarrow \{v_1, v_2\} \subset C \wedge v_1v_2 \notin C$

Als Kantenzug K (der Länge k) bezeichnen wir eine nicht leere Folge $v_0e_0v_1e_1...e_{k-1}v_k$ abwechselnd bestehend aus Knoten und Kanten, wobei $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ für alle $i < k$. Ist $v_0 = v_k$, so nennen wir den Kantenzug *geschlossen*.
Man nennt einen geschlossenen Kantenzug *eulersch*, wenn er jede Kante des Graphen genau einmal enthält.

2.2 Sätze

Satz Für jeden Graphen G gilt $rad(G) \leq diam(G) \leq 2 \cdot rad(G)$.

Proposition 0.3.1. Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ und einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$ (für $\delta(G) \geq 2$).

Proposition 0.3.2. Für jeden Graphen G, der einen Kreis enthält, gilt $g(G) \leq 2 \cdot diam(G) + 1$.

3 Zusammenhang

3.1 Definitionen

Seien A und B Eckenmengen, sei $X \subseteq V \cup E$., sei C ein Kreis.

$\boxed{G \text{ ist zusammenhängend}}$	$\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V : d_G(v_1, v_2) \neq \infty$
$\boxed{G \text{ ist k-zusammenhängend}}$	$\Leftrightarrow \forall T = [V]^{k-1} : G - T$ ist zusammenhängend
$\boxed{\text{Zusammenhang von } G}$	$\kappa(G)$ ist das größte k, für das G k-zusammenhängend ist.
$\boxed{G \text{ ist l-kantenzusammenhängend}}$	$\Leftrightarrow \forall T = [E]^{l-1} : G - T$ ist zusammenhängend
$\boxed{\text{Kantenzusammenhang von } G}$	$\lambda(G)$ ist das größte l, für das G l-kantenzusammenhängend ist.
$\boxed{K \text{ ist eine Komponente von } G}$	$\Leftrightarrow \nexists v_1 \in V - V(K) : K + v_1$ ist zusammenhängend (K ist *maximal zusammenhängend.*)
$\boxed{X \text{ ist ein } A\text{-}B\text{-Trenner}}$	$\Leftrightarrow \forall P = A\text{-}B\text{-Weg} : X \cap P \neq \emptyset$ (bzw. a-B-Trenner, wenn $\lvert A \rvert = 1$)
$\boxed{v_1 \text{ ist eine Arikulation}}$	$\Leftrightarrow \exists v_2, v_3 \in V : v_1$ ist ein v_2-v_3-Trenner
$\boxed{v_1 v_2 \text{ ist eine Brücke}}$	$\Leftrightarrow v_1 v_2$ ist ein v_1-v_2-Trenner $\Leftrightarrow \nexists C \subseteq G : v_1 v_2 \in E(C)$
$\boxed{B \text{ ist ein Block in } G}$	$\Leftrightarrow B$ ist ein maximal zusammenhängender Teilgraph von G und enthält keine Artikulation. (zumindest keine in B selbst)
$\boxed{\text{Block-Graph von } G}$	Ein Graph der für jeden Block und jede Artikulation aus G einen Knoten enthält. Kanten existieren zwischen dem Knoten eines Blockes und dem einer Artikulation genau dann, wenn die Artikulation Teil des Blockes ist.

3.2 Sätze

Proposition 0.4.2. Ist $|G| \geq 2$, so gilt $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Satz 0.8.1 Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn jede seiner Ecken geraden Grad hat.

Proposition 2.1.4. Der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.

Lemma 2.1.2. (1/2) Sei G ein beliebiger Graph, dann sind die Kreise von G genau die Kreise seiner Blöcke.

Satz von Menger Sei $G(V, E)$ ein Graph und A und B Teilmengen von V, so ist die kleinste Mächtigkeit einer A-B-trennenden Knotenmenge gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter A-B-Wege.

Satz von Menger *(alternativ)* G ist k-zusammenhängend $\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V$ existieren mindestens k disjunkte Wege. Gleiches gilt für den Kantenzusammenhang.

4 Bäume und Wälder

4.1 Definitionen

Ein Graph, der keinen Kreis enthält nennt man Wald. Ein zusammenhängender Wald ist ein Baum, wobei man seine Ecken mit Grad 1 als Blätter bezeichnet. Ist T ein Baum, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- Zwischen je zwei Ecken enthält T genau einen Weg.
- T ist *minimal zusammenhängend* bzw. $\lambda(T) = 1$.
- T ist *maximal kreislos*, d.h. nach dem Hinzufügen einer beliebigen neuen Kante e_1 liegt e_1 in $T + e_1$ auf einem Kreis.

Sei G wieder ein Graph, T ein Baum und W ein Wald.

Spannbaum T von G	Für $T \subseteq G$ gilt $V(T) = V(G)$. Alle Kanten aus $E - E(T)$ nennt man *Sehnen*. (Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen Spannbaum.)

4.2 Sätze

Korollar 0.5.2. Die Eckenmenge eines Baumes hat stets eine Aufzählung $(v_1, ..., v_n)$ mit der Eigenschaft, dass v_i für jedes $i \geq 2$ genau einen Nachbarn in $\{v_1, ..., v_{i-1}\}$ hat.

Korollar 0.5.3. Ein zusammenhängender Graph mit n Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er $n-1$ Kanten hat.

Korollar 0.5.4. Ist T ein Baum und G ein Graph mit $\delta(G) \geq |T|-1$, so gilt $T \subseteq G$, d.h. G hat einen zu T isomorphen Teilgraphen.

Proposition 0.5.6. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen normalen Spannbaum, mit beliebig vorgebbarer Ecke als Wurzel.

5 Bipartite Graphen

5.1 Definitionen

Ein Graph $G(V, E)$ heißt *r-partit*, wenn eine Partition von V in r-viele Partitionen möglich ist, so dass die Endecken einer Kante aus E in unterschiedlichen Partitionsklassen liegen. Ein 2-partiter Graph heißt auch *bipartit*.
Sei R ein r-partiter Graph und sei B ein bipartiter Graph.

R ist vollständig r-partit	$\Leftrightarrow$ für je zwei Knoten v_1, v_2 aus verschiedenen Klassen gilt $v_1 v_2 \in E(R)$.
$K_{n_1,...,n_r}$	Vollständiger r-partiter Graph mit n_k vielen Knoten in der k-ten Partition.

$\boxed{K_s^r}$	$K_{s_1,...,s_r}$, wobei $s_1 = ... = s_r = s$.
Sterne	Bipartite Graphen der Form $K_{1,n}$, wobei die ein-elementige Partitionsklasse das *Zentrum* bildet.

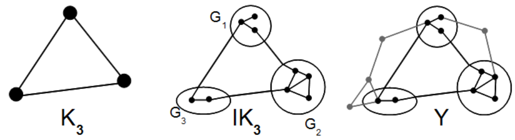
5.2 Sätze

Proposition 0.6.1 Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

6 Minoren und Kontraktion

6.1 Definitionen Minor

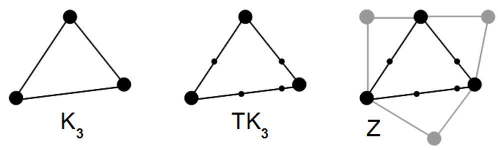
Ersetzt man die Ecken $v_1 \in V$ eines Graphen $G(V, E)$ durch disjunkte zusammenhängende Graphen G_{v_1} sowie die Kanten $v_1v_2 \in E$ durch Kanten der Form w_1w_2, wobei $w_1 \in G_{v_1}$ und $w_2 \in G_{v_2}$, so erhält man einen neuen Graphen der Klasse IG. Enthält nun ein weiterer Graph Y einen Graphen aus IG als Teilgraph, so nennt man G den *Minor* von Y. Man schreibt auch $G \preccurlyeq Y$ für die Minorenrelation.



Kontraktion	Durch Ersetzen der Teilgraphen $G_{v_1}, G_{v_2}, ...$ des Minors IG durch die jeweiligen Knoten $v_1, v_2, ...$ erhalten wir G durch Kontraktion.
Kantenkontraktion	Entfernen einer Kante v_1v_2 aus G, wonach v_1 und v_2 zu v_1' verschmelzen, für den $N(v_1') = N(v_1) \cup N(v_2)$ gilt.

6.2 Definitionen Topologischer Minor

Eine *Unterteilung* TG eines Graphen $G(V, E)$ entsteht durch das Ersetzen der Kanten $e_1 \in E$ durch neue Wege, die keine inneren Ecken in V oder andere neue Wege haben dürfen. Enthält ein Graph Z einen TG als Teilgraph, so nennen wir G einen *topologischen Minor* von Z.



Verzweigungsecken	Die Knoten aus dem topologischen Minor.
Unterteilungsecken	$V(TG) - V(G)$ (Alle Unterteilungsecken haben den Grad 2.)
G' ist Unterteilungsgraph von G	$\Leftrightarrow$ G' kann aus G durch sukzessives Ersetzen einer Kante v_1v_2 durch zwei neue Kanten der Form v_1v_3' und $v_3'v_2$ gewonnen werden.

6.3 Sätze

Proposition 0.7.1 G ist genau dann ein IX, wenn X aus G durch eine Folge von Kantenkontraktionen gewonnen werden kann.

Proposition 0.7.2

1. Jeder TX ist auch ein IX; jeder topologische Minor eines Graphen ist somit auch sein (gewöhnlicher) Minor.
2. Ist $\Delta(X) \leq 3$, so enthält jeder IX einen TX; jeder Minor mit Maximalgrad ≤ 3 eines Graphen ist somit auch sein topologischer Minor.

Proposition 0.7.3 Die Minorenrelation $\preccurlyeq$ und die topologische Minorenrelation sind Ordnungsrelationen, d.h. sie sind reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch.

7 Paarungen, Überdeckungen und Faktoren

7.1 Definitionen

Sei G ein Graph. Sei $F(V_F, E_F)$ ein bipartiter Graph mit Partitionen A und B. Sei P eine beliebige Paarung von F.

Matching oder Paarung	Eine Menge P unabhängiger Kanten aus G, mit der jeder Knoten aus $U \subseteq V$ genau einmal inzidiert.
P ist eine perfekte Paarung	$\Leftrightarrow U = V$
k-Faktor	Ein k-regulärer aufspannender Teilgraph von G.
Eckenüberdeckung	Eine Menge $M \subseteq V$ nenn wir Eckenüberdeckung, wenn jede Kante aus E mit mindestens einem Knoten aus M inzidiert.

Ein Teilgraph $H \subseteq G$ ist also genau dann ein 1-Faktor von G, wenn E(H) eine perfekte Paarung von V ist.

W ist ein alternierender Weg bzgl. P	$\Leftrightarrow W$ beginnt mit einem ungepaarten Knoten aus A und enthält dann abwechselnd Kanten aus $E - P$ und P
W ist ein Verbesserungsweg[1]	$\Leftrightarrow W$ endet mit einem ungepaarten Knoten aus B.

Zu jeder Paarung mit weniger Kanten als möglich existiert ein Verbesserungsweg, sprich: durch sukzessives Augmentieren einer beliebigen Anfangspaarung lässt sich eine *Paarung maximaler Mächtigkeit* finden.

Komponentenmenge	$\mathcal{C}_G$ ist die Menge aller Komponenten von G.
Anzahl ungerader Komponenten	$q(G)$ bezeichnet die Anzahl der Komponenten ungerader Ordnung von G.

[1] auch *augmentierender Weg*

7.2 Sätze

Satz 1.1.1. (König 1931) Die größte Mächtigkeit einer Paarung in G ist gleich der geringsten Mächtigkeit einer Eckenüberdeckung von E.

Satz 1.1.2. (Hall 1935, Heiratssatz) G enthält genau dann eine Paarung von A, wenn $|N(S)|\geq |S|$ gilt für alle Eckenmengen $S \subseteq A$.

Korollar 1.1.3. Ist G k-regulär mit $k \geq 1$, so hat G einen 1-Faktor.

Korollar 1.1.5. (Petersen 1891) Jeder reguläre Graph geraden Grades > 0 hat einen 2-Faktor.

Korollar 1.2.1. (Tutte 1947) Für alle $S \subseteq V$ hat G genau dann einen 1-Faktor, wenn $q(G-S) \leq S$ gilt.

Korollar 1.2.2. (Petersen 1891) Jeder brückenlose kubische (3-regulär) Graph hat einen 1-Faktor.

8 Planare Graphen

Ein *planarer* oder *plättbarer* Graph kann auf einer Ebene dargestellt werden, sodass sich keine Kanten schneiden. *Maximal planare* Graphen sind sogenannte *Dreiecksgraphen*, zu denen keine weitere Kante hinzugefügt werden kann, sodass der Graph weiter planar bleibt.

Satz von Kuratowski Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen besitzt, der ein Unterteilungsgraph des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist bzw. weder den K_5 noch den $K_{3,3}$ als topologischen Minor enthält.

Eulerscher Polyedersatz Seien e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten eines beschränkten, konvexen Polyeders, dann gilt $e + f - k = 2$.
Sei g die Gebietszahl eines Graphen $G(V, E)$ (äußeres Gebiet wird mitgezählt), dann gilt für planare Graphen die allgemeinere Version $|V|+g - |E|= 2$.

Satz Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Ecken ist genau dann maximal planar, wenn er $3n-6$ Kanten hat.

Satz Ein planarer Graph kann höchstens 5-fach zusammenhängend sein und es gibt immer einen Knoten mit Knotengrad höchstens 5.

9 Färbungen

Sei G(V,E) ein Graph.

9.1 Definitionen

Eckenfärbung von G	Eine Abildung $c : V \to S : c(v_1) \neq c(v_2) \Leftrightarrow v_1v_2 \in E$. ($S$ steht für die „Farben“ als Elemente von $\mathbb{N}$.)
Chromatische Zahl	$\chi(G)$ ist das kleinste k für das G eine k-Eckenfärbung der Form $c : V \to \{1, ..., k\}$ besitzt.

G ist k-färbbar	$\Leftrightarrow k \geq \chi(G)$

Eine k-Färbung ist eine Eckenpartition in k unabhängige Mengen, so sind die 2-färbbaren Graphen gerade die bipartiten Graphen.

Kantenfärbung von G	Eine Abildung $c : E \to S : c(e_1) \neq c(e_2) \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$.
Chromatischer Index	$\chi'(G)$ ist das kleinste k für das G eine k-Kantenfärbung der Form $c : E \to \{1, ..., k\}$ besitzt.

9.2 Sätze

Satz 4.1.1. (Vierfarbensatz) Jeder ebene Graph hat eine Eckenfärbung mit höchstens 4 Farben.

Proposition 4.1.2. (Fünffarbensatz) Jeder ebene Graph ist 5-färbbar.

Satz 4.1.3. (Grötzsch 1959) Jeder ebene Graph, der kein Dreieck enthält, ist 3-färbbar.

Satz 4.2.1. Für jeden Graphen G gilt $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2 \cdot |E| + \frac{1}{4}}$.

Satz 4.2.4. (Brooks 1941) Sei G ein zusammenhängender Graph. Ist G weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge, dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Satz 4.3.1. (König 1916) Für jeden bipartiten Graphen G gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Satz 4.3.2. (Vizing 1964) Für Graphen G gilt $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

10 Cliquen und stabile Mengen

Sei $G(V, E)$ ein Graph.

C ist eine Clique von G	$\Leftrightarrow C \subseteq V \wedge G[C]$ ist vollständig. ($G[C]$ ist der von C induzierte Teilgraph.)
Cliquenzahl von G	$\omega(G)$ ist die Anzahl der Knoten der größten Clique von G.
S ist eine stabile Menge von G	$\Leftrightarrow S \subseteq V \wedge \lvert E(G[S]) \rvert = 0$
Stabilitätszahl[2] von G	$\alpha(G)$ ist die Anzahl der Knoten der größten stabilen Menge von G.

Satz Zu jeder stabilen Menge eines Graphen G gibt es eine Clique im Komplementgraphen $\overline{G}$ bzw. umgekehrt.

[2] auch *Unabhängigkeitszahl*

11 Directed acyclic graph (DAG)

Bei *gerichteten Graphen* $G(V, E)$ bezeichnen wir die Menge der Kanten E nicht mehr als Teilmenge aller zwei-elementigen Teilmengen $[V]^2$, **sondern** als Teilmenge aller geordneten Paare (v_1, v_2) der Knotenmenge V die durch das kartesische Produkt $V \times V$ entstehen. Eine Kante $\overrightarrow{v_1 v_2}$ ist nur von v_1 nach v_2 „begehbar". *DAG*s haben zusätzlich die Eigenschaft, dass sie kreisfrei sind. Ist diese Eigenschaft erfüllt, dann beschreiben die gerichteten Kanten eine *Halbordnung* auf den Knoten.

Sei $G(V, E)$ ein gerichteter, $G'(V', E')$ ein gerichteter kreisfreier und $H(V_H, E_H)$ ein

$$\boxed{\text{Eingangsgrad von } v_1 \in G} \quad d_-(v_1) = |\{(\overrightarrow{v_2 v_1}) \in E : v_2 \in V\}|$$

$$\boxed{\text{Ausgangsgrad von } v_1 \in G} \quad d_+(v_1) = |\{(\overrightarrow{v_1 v_2}) \in E : v_2 \in V\}|$$

$$\boxed{t \text{ ist eine topologische Sortierung}} \quad \Leftrightarrow t : V' \to \{v_1, ..., v_{|V'|}\} : (t(v_1) < t(v_2) \Leftrightarrow (v_1, v_2) \in E').$$

$$\boxed{O(V_O, E_O) \text{ ist eine Orientierung von } H} \quad \Leftrightarrow V_O = V_H \wedge \forall v_1 v_2 \in E_H \; !\exists((\overrightarrow{v_1 v_2}) \in E_O \vee (\overrightarrow{v_2 v_1}) \in E_O)$$

Eine topologische Sortierung für G ist nicht zwingend eindeutig.

Satz Ein gerichteter Graph G ist zyklenfrei (DAG) $\Leftrightarrow$ G besitzt eine topologische Sortierung.