Semantic Web

Vorlesung
Dr. Harald Sack
Hasso-Plattner-Institut für Softwaresystemtechnik
Universität Potsdam
Wintersemester 2008/09

Blog zur Vorlesung: http://sw0809.blogspot.com/

Semantic Web - Vorlesungsinhalt

1. Einführung
2. Die Sprachen des Semantic Web
3. **Wissensrepräsentation**
4. Web of Trust
5. Ontology Engineering
6. Semantic Web Anwendungen

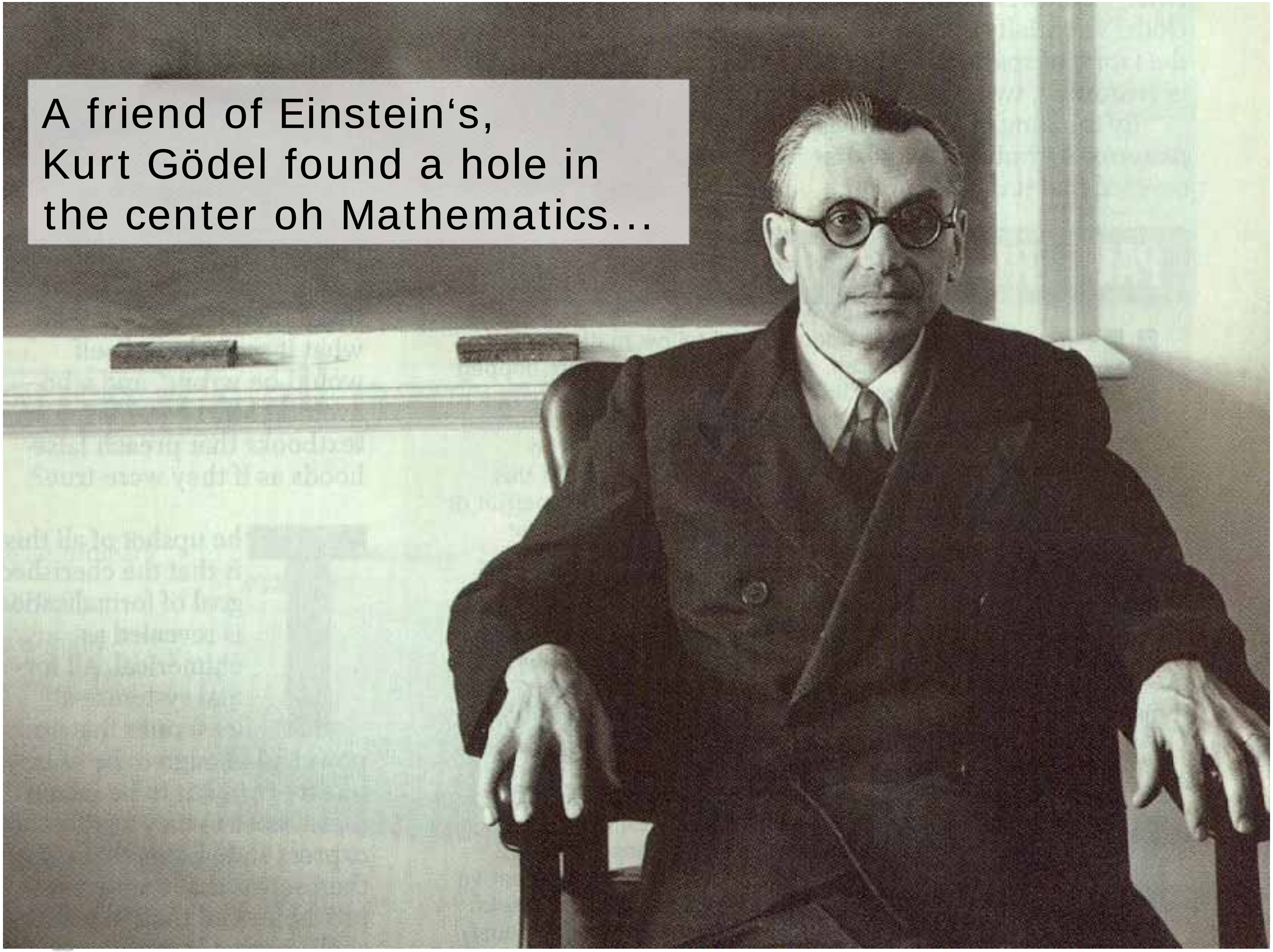
3. Wissensrepräsentationen

3.5 Wiederholung Aussagenlogik und Prädikatenlogik

3.5.1 Logik Grundlagen

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

A friend of Einstein‘s,
Kurt Gödel found a hole in
the center oh Mathematics…



Logik – Grundlagen

- nur knappe und informelle Wiederholung
  - siehe Bachelorstudium Mathematik I, etc.
- im Weiteren Verlauf wird ein solides Verständnis der Grundlagen der Logik vorausgesetzt, daher bitte selbstständig wiederholen
  - siehe auch

U. Schöning:
Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 5. Aufl. 2000.

Logik – Grundlagen

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

- **Definition** (für unsere Vorlesung):
  Logik ist die Lehre
  vom formal korrekten Schließen.

- Warum „formale Logik“?
  --> Automatisierbarkeit!

- Konstruktion einer „Rechenmaschine“ für Logik

Logik – Grundlagen

"... omnes humanas ratiocinationes ad calculum aliqvem characteristicum qvalis in Algebra combinatoriave arte et numeris habetur, revocandi, qvo non tantum certa arte inventio humana promoveri posset, sed et controversiae multae tolli, certum ab incerto distingvi, et ipsi gradus probabilitatum aestimari, dum disputantium alter alteri dicere posset: **calculemus**."

aus einem Brief an Ph. J. Spencer, Juli 1687

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716

Logik – Grundlagen

„...alle menschlichen Schlussfolgerungen müssten auf irgendeine mit Zeichen arbeitende Rechnungsart zurückgeführt werden, wie es sie in der Algebra und Kombinatorik und mit den Zahlen gibt, wodurch nicht nur mit einer unzweifelhaften Kunst die menschliche Erfindungsgabe gefördert werden könnte, sondern auch viele Streitigkeiten beendet werden könnten, das Sichere vom Unsicheren unterschieden und selbst die Grade der Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden könnten, da ja der eine der im Disput Streitenden zum anderen sagen könnte: **Lasst uns doch nachrechnen!**

aus einem Brief an Ph. J. Spencer, Juli 1687

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716

Logik – Grundlagen

- **Syntax**: Zeichen ohne Bedeutung
  definiert Regeln, wie zulässige Zeichenfolgen gebildet werden dürfen
- **Semantik**: Bedeutung der Syntax
  definiert Regeln, wie die Bedeutung von komplexen Zeichenfolgen aus der Bedeutung von atomaren Zeichenfolgen abgeleitet werden kann

```
If (i<0) then display (“negatives Guthaben!“)
```

Syntax

Zuweisung von Bedeutung

Gebe die Meldung “negatives Guthaben!“ aus, wenn der Kontostand i unter 0 Euro sinkt.

Bedeutung, z.B. ‘die reale Welt‘

Was ist Semantik

- Bsp.: Programmiersprachen

```
FUNCTION f(n:natural):natural;
BEGIN
          IF n=0 THEN f:=1
          ELSE f:=n*f(n-1);
END;
```

Syntax

Berechnung der Fakultät

Intendierte Semantik

$f : n \rightarrow n!$

formale Semantik

Verhalten des Programms bei der Ausführung

Prozedurale Semantik

Aussagenlogik

Junktor	Name	Intuitive Bedeutung
$\neg$	Negation	„nicht“
$\wedge$	Konjunktion	„und“
$\vee$	Disjunktion	„oder“
$\rightarrow$	Implikation	„wenn – dann“
$\leftrightarrow$	Äquivalenz	„genau dann, wenn“

- Prädikatssymbole/aussagenlogische Variablen, z.B. p, q, r, s, ...
- „richtiges“ Formen von Formeln – im Zweifelsfall klammern:
  - $((p \wedge \neg q) \vee s) \rightarrow \neg p$
  - $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \vee \neg p)$
- Präzedenzen: $\neg$ vor $\wedge, \vee$ vor $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Aussagenlogik

- Beispiele

Einfache Aussagen	*Modellierung*
Die Sonne ist grün	g
Es regnet	r
Die Straße wird nass	n

Zusammengesetzte Aussagen	*Modellierung*
Wenn es regnet, dann wird die Straße nass	$r \rightarrow n$
Wenn es regnet und die Straße nicht nass wird, dann ist die Sonne grün	$(r \wedge \neg n) \rightarrow g$

Prädikatenlogik erster Stufe (First Order Logic, FOL)

Quantor	Name	Intuitive Bedeutung
$\exists$	Existenzquantor	„es existiert“
$\forall$	Allquantor, Universalquantor	„für alle“

- Junktoren wie in der Aussagenlogik
- Variablen, z.B. X,Y,Z,...
- Konstantensymbole, z.B. a, b, c, ...
- Funktionssymbole, z.B. f, g, h, ... (mit Stelligkeit)
- Relations-/Prädikatssymbole, z.B. p, q, r, ... (mit Stelligkeit)

  $(\forall X)(\exists Y)\ ((p(X) \vee \neg q(f(X),Y)) \rightarrow r(X))$

FOL: Syntax

- „richtiges“ Formen von ***Termen*** aus Variablen, Konstanten- und Funktionssymbolen:
  - f(X), g(a,f(Y)), s(a), .(H,T), x_location(Pixel)
- „richtiges“ Formen von ***Atomen*** aus Relationssymbolen, deren Argumente Terme sind:
  - p(f(X)), q (s(a),g(a,f(Y))), add(a,s(a),s(a)), greater_than(x_location(Pixel),128)
- „richtiges“ Formen von ***Formeln*** aus Atomen, Junktoren und Quantoren:
  - (∀Pixel) (greater_than(x_location(Pixel),128) → red(Pixel))
- Im Zweifelsfall klammern! Alle Variablen quantifizieren!

FOL: Beispiel Addition

$$(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)\ \big(\ add(a,X,X)\ \wedge\ (\ add(X,Y,Z) \rightarrow add(s(X),Y,s(Z))\ )\ \big)$$

Intendierte Semantik:

a ... 0 (natürliche Zahl Null)

s ... Nachfolgerfunktion/Addition von Eins

add(x,y,z) ... „z ist die Summe von x und y“

FOL: Beispiel Listen

$$(\forall H)(\forall T)\ \ (list([]) \vee (list(T) \rightarrow list(.(H,T))))$$

Informell: [] ... leere Liste

.(H,T) ... H ist Kopf, T Restliste

schreibe auch .(H,T) als [H|T]

$$\begin{aligned}
&(\forall H)(\forall T)\\
&\quad (member(a,[a|T])\\
&\quad \vee (member(a,T) \rightarrow member(a,[H|T]))\\
&\quad)
\end{aligned}$$

Intendierte Semantik:

member(x,liste) ... “x ist Element von liste”

FOL: Beispiel Verwandschaftsverhältnisse

$(\forall X)\ (\ parent(X) \leftrightarrow (\ human(X) \land (\exists Y)\ parent\_of(X,Y)\ ))$

$(\forall X)\ (\ human(X) \rightarrow (\exists Y)\ parent\_of(Y,X)\ )$

$(\forall X)\ (orphan(X) \leftrightarrow (human(X) \land \neg (\exists Y)\ (parent\_of(Y,X) \land alive(Y))))$

$(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)$
$\quad (uncle\_of(X,Z) \leftrightarrow (brother\_of(X,Y) \land parent\_of(Y,Z))\ )$

Intendierte Semantik: klar!

FOL: Beispiel Pinguine

$$((\forall X)(penguin(X) \rightarrow blackandwhite(X))$$
$$\wedge (\exists X)(oldTVshow(X) \wedge blackandwhite(X))$$
$$) \rightarrow (\exists X)(penguin(X) \wedge oldTVshow(X))$$

Intendierte Semantik?

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

3.5 Wiederholung Aussagenlogik und Prädikatenlogik

3.5.1 Logik Grundlagen

3.5.2 Modelltheoretische Semantik

3.5.3 Normalformen

3.5.4 Resolution

3.5.5 Eigenschaften von PL und FOL

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Aussagenlogik: Modelltheoretische Semantik

- Interpretation I:
  Abbildung aller Prädikatssymbole nach {w,f}.
- Ist F eine Formel und I eine Interpretation, dann ist I(**F**) ein Wahrheitswert, der aus F und I mittels **Wahrheitstafeln** ermittelt wird.

I(p)	I(q)	I(¬p)	I(p∨q)	I(p∧q)	I(p→q)	I(p↔q)
f	f	w	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	f	w	t	w	w

Aussagenlogik: Modelltheoretische Semantik

- Wir schreiben $I \models F$, wenn $I(F)=w$ ist, und nennen dann die Interpretation I ein ***Modell*** der Formel F.

- Zentrale Begriffe:
  - allgemeingültig (Tautologie)
  - erfüllbar
  - widerlegbar
  - unerfüllbar

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik

- Struktur:
  - Festlegung eines Grundbereichs D.
  - Konstantensymbole werden auf Elemente von D abgebildet.
  - Funktionssymbole auf Funktionen auf D.
  - Relationssymbole auf Relationen über D.

- Dann:
  - Terme werden zu Elementen von D.
  - Relationssymbole mit Argumenten werden wahr oder falsch.
  - Entsprechende Behandlung der Junktoren/Quantoren.

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik

$$(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)$$
$$(\ add(a,X,X)$$
$$\wedge\ (\ add(X,Y,Z) \rightarrow add(s(X),Y,s(Z))\ )$$
$$)$$

- Modell I:
  - Grundbereich: natürliche Zahlen N
  - I(a) = 0
  - I(s): n → n+1
  - I(add(k,m,n))=w genau dann, wenn k+m=n ist.

  I ist Modell der Formel.

Prädikatenlogik: Modelltheoretische Semantik

$$
\begin{aligned}
&(\ (\forall X)(\ penguin(X) \rightarrow blackandwhite(X)\ ) \\
&\wedge\ (\exists X)(\ oldTVshow(X) \wedge blackandwhite(X)\ ) \\
&)\ \rightarrow\ (\exists X)(\ penguin(X) \wedge oldTVshow(X)\ )
\end{aligned}
$$

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

- Interpretation I:
  - Grundbereich: eine Menge M, die Elemente a,b,c enthält.
  - ... keine Konstanten- oder Funktionssymbole ...
  - Wir zeigen: Die Formel ist widerlegbar (d.h. sie ist nicht allgemeingültig):
  - Sind I(penguin)(a), I(blackandwhite)(a), I(oldTVshow)(b), I(blackandwhite)(b) wahr, I(oldTVshow)(a) jedoch falsch,

  dann ist die Formel unter I falsch, d.h. **I ⊭ F**.

Der Begriff der logischen Konsequenz

- Eine ***Theorie*** T ist eine Menge von Formeln.
- Eine **Interpretation** I ist ein **Modell** für T, wenn I $\models$ G für jede Formel G in T gilt.
- Eine Formel F ist eine ***logische Konsequenz*** aus T, wenn jedes Modell von T auch Modell von F ist.
- Wir schreiben dann T $\models$ F.

- Zwei Formeln F,G heißen ***logisch*** (auch *semantisch*) ***äquivalent***, wenn {F} $\models$ G und {G} $\models$ F gelten.
- Wir schreiben dann **F $\equiv$ G**.

Logische Äquivalenzen - Beispiele

$F \land G \equiv G \land F$
$F \lor G \equiv G \lor F$

$F \rightarrow G \equiv \neg F \lor G$
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \land (G \rightarrow F)$

$\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$
$\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$

DeMorgan'sche Gesetze

$\neg\neg F \equiv F$

$F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$
$F \land (G \lor H) \equiv (F \land G) \lor (F \land H)$

$\neg(\forall X)\, F \equiv (\exists X)\, \neg F$
$\neg(\exists X)\, F \equiv (\forall X)\, \neg F$

$(\forall X)(\forall Y)\, F \equiv (\forall Y)(\forall X)\, F$
$(\exists X)(\exists Y)\, F \equiv (\exists Y)(\exists X)\, F$

$(\forall X)\, (F \land G) \equiv (\forall X)\, F \land (\forall X)\, G$
$(\exists X)\, (F \lor G) \equiv (\exists X)\, F \lor (\exists X)\, G$

3.5 Wiederholung Aussagenlogik und Prädikatenlogik

3.5.1 Logik Grundlagen

3.5.2 Modelltheoretische Semantik

3.5.3 Normalformen

3.5.4 Resolution

3.5.5 Eigenschaften von PL und FOL

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Normalformen

- Zu jeder Formel gibt es unendlich viele logisch äquivalente Formeln.
- Für jede solche ***Äquivalenzklasse*** sucht man nun möglichst einfache ***Repräsentanten***.
- Diese Repräsentanten werden ***Normalformen*** genannt.
- Einfaches Beispiel:
  - schreibe $\neg F$ statt $\neg\neg\neg\neg\neg F$

Normalformen

- Ziel: Umwandlung von Formeln in ***Klauselform***.
- Zwischenschritte:
  1. Negationsnormalform
     - alle Negationen stehen ganz innen
  2. Pränexnormalform
     - alle Quantoren stehen ganz vorne
  3. Skolemisierte Pränexnormalform
     - Eliminierung der Existenzquantoren
  4. konjunktive Normalform (CNF) = **Klauselform**
     - Darstellung als Konjunktion von Disjunktionen

Negationsnormalform

- Alle Negationszeichen werden durch Verwendung der folgenden Äquivalenzen nach innen gezogen:

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \qquad \neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$$

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \qquad \neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$$

$$\neg(\forall X)\, F \equiv (\exists X)\, \neg F \qquad \neg\neg F \equiv F$$

$$\neg(\exists X)\, F \equiv (\forall X)\, \neg F$$

- Ergebnis:
  - Implikationen und Äquivalenzen fallen weg
  - mehrfachen Negationen fallen weg
  - alle Negationszeichen stehen direkt vor Atomen

Negationsnormalform

- Beispiel

$$((\forall X)(penguin(X) \rightarrow blackandwhite(X))$$
$$\wedge (\exists X)(oldTVshow(X) \wedge blackandwhite(X))$$
$$) \rightarrow (\exists X)(penguin(X) \wedge oldTVshow(X))$$

wird zu

$$\neg((\forall X)(\neg penguin(X) \vee blackandwhite(X))$$
$$\wedge (\exists X)(oldTVshow(X) \wedge blackandwhite(X))$$
$$) \vee (\exists X)(penguin(X) \wedge oldTVshow(X))$$

und dann zu

$$((\exists X)(penguin(X) \wedge \neg blackandwhite(X))$$
$$\vee (\forall X)(\neg oldTVshow(X) \vee \neg blackandwhite(X))$$
$$) \vee (\exists X)(penguin(X) \wedge oldTVshow(X))$$

Pränexnormalform

- erst Formel bereinigen (Quantoren binden verschiedene Variablen).

$((\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \neg\text{blackandwhite}(X))$

$\vee (\forall X)(\neg\text{oldTVshow}(X) \vee \neg\text{blackandwhite}(X))$

$) \vee (\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \text{oldTVshow}(X))$

wird zu

$((\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \neg\text{blackandwhite}(X))$

$\vee (\forall Y)(\neg\text{oldTVshow}(Y) \vee \neg\text{blackandwhite}(Y))$

$) \vee (\exists Z)(\text{penguin}(Z) \wedge \text{oldTVshow}(Z))$

Pränexnormalform

- Dann aus der Negationsnormalform einfach alle Quantoren in derselben Reihenfolge nach vorne ziehen.

$((\exists X)(\text{penguin}(X) \wedge \neg\text{blackandwhite}(X))$

$\vee (\forall Y)(\neg\text{oldTVshow}(Y) \vee \neg\text{blackandwhite}(Y))$

$) \vee (\exists Z)(\text{penguin}(Z) \wedge \text{oldTVshow}(Z))$

wird zu

$(\exists X)(\forall Y)(\exists Z)((\text{penguin}(X) \wedge \neg\text{blackandwhite}(X))$

$\vee (\neg\text{oldTVshow}(Y) \vee \neg\text{blackandwhite}(Y)))$

$\vee (\text{penguin}(Z) \wedge \text{oldTVshow}(Z))$

Pränexnormalform

- "Existenzquantoren entfernen"

$(\exists X)\ (\forall Y)\ (\exists Z)\ (\ (\ penguin(X) \land \neg blackandwhite(X)\ )$

$\lor\ (\ \neg oldTVshow(Y) \lor \neg blackandwhite(Y)\ )\ )$

$\lor\ (\ penguin(Z) \land oldTVshow(Z)\ )$

wird zu ...

$(\forall Y)(\ (\ penguin(a) \land \neg blackandwhite(a)\ )$

$\lor\ (\ \neg oldTVshow(Y) \lor \neg blackandwhite(Y)\ )\ )$

$\lor\ (\ penguin(\ f(Y)\ ) \land oldTVshow(\ f(Y)\ )\ )\ )$

- wobei a und f neue Symbole sind (sog. *Skolemkonstanten* bzw. *Skolemfunktionen*).

Pränexnormalform

- Vorgehensweise:
  1. Entfernen der Existenzquantoren von links nach rechts.
  2. Gibt es keinen Allquantor links des zu entfernenden Existenzquantors, so wird die entsprechende Variable durch ein **neues Konstantensymbol** ersetzt.
  3. Gibt es *n* Allquantoren links des zu entfernenden Existenzquantors, so wird die entsprechende Variable durch ein **neues Funktionssymbol** mit Stelligkeit *n* ersetzt, dessen Argumente genau die Variablen der *n* Allquantoren sind.

Konjunktive Normalform (Klauselform)

- Es gibt nur noch Allquantoren, also lassen wir sie weg:

$$(\text{penguin}(a) \wedge \neg\text{blackandwhite}(a))$$
$$\vee (\neg\text{oldTVshow}(Y) \vee \neg\text{blackandwhite}(Y)))$$
$$\vee (\text{penguin}(f(Y)) \wedge \text{oldTVshow}(f(Y))$$

- Mit Hilfe semantischer Äquivalenzen wird die Formel nun als Konjunktion von Disjunktionen geschrieben.

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$
$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

Konjunktive Normalform (Klauselform)

$$(\text{penguin}(a) \land \neg\text{blackandwhite}(a))$$
$$\lor (\neg\text{oldTVshow}(Y) \lor \neg\text{blackandwhite}(Y)))$$
$$\lor (\text{penguin}(f(Y)) \land \text{oldTVshow}(f(Y))$$

wird zu

....

$$(\text{penguin}(a) \lor \neg\text{oldTVshow}(Y) \lor \neg\text{blackandwhite}(Y) \lor \text{penguin}(f(Y)))$$
$$\land (\text{penguin}(a) \lor \neg\text{oldTVshow}(Y) \lor \neg\text{blackandwhite}(Y) \lor \text{oldTVshow}(f(Y)))$$
$$\land (\neg\text{blackandwhite}(a) \lor \text{oldTVshow}(Y) \lor \neg\text{blackandwhite}(Y) \lor \text{penguin}(f(Y)))$$
$$\land (\neg\text{blackandwhite}(a) \lor \text{oldTVshow}(Y) \lor \neg\text{blackandwhite}(Y) \lor \text{oldTVshow}(f(Y)))$$

Eigenschaften von Normalformen

- Sei F eine Formel,
- G die Pränexnormalform von F,
- H die skolemisierte Pränexnormalform von G,
- K die Klauselform von H.

- Dann ist $F \equiv G$ und $H \equiv K$ aber i.A. $F \not\equiv K$.

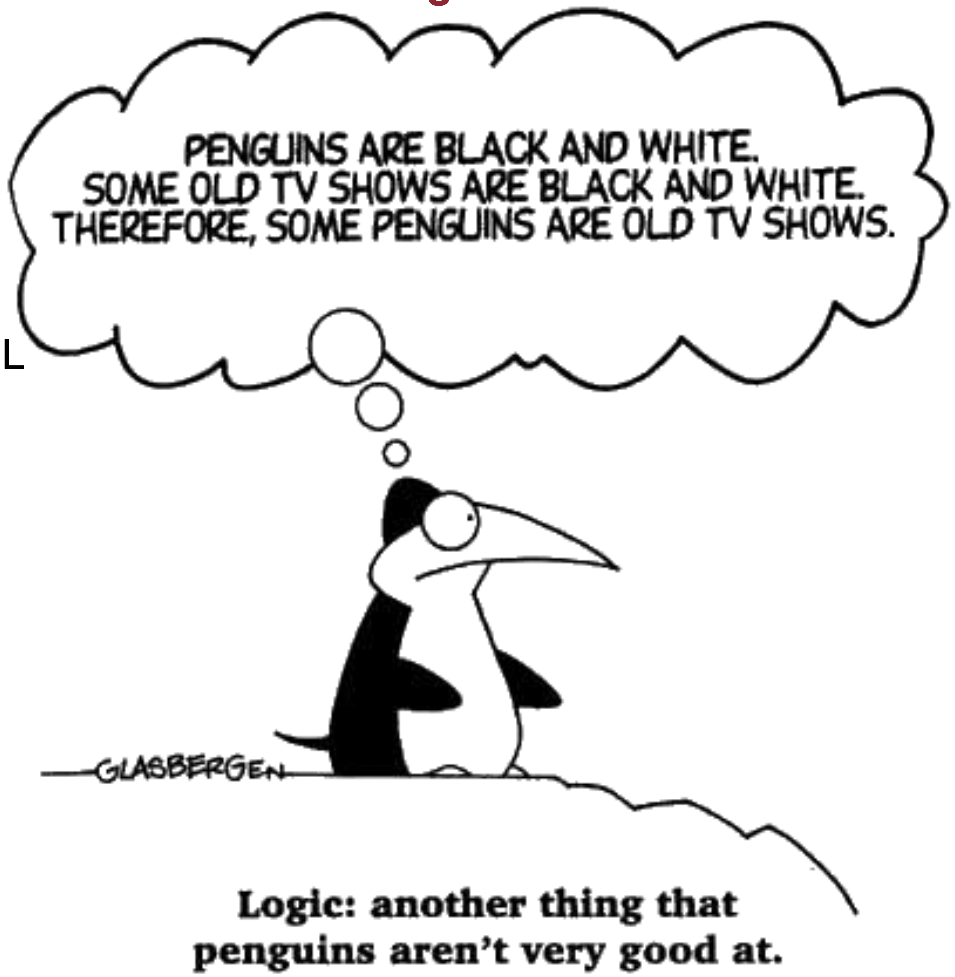
- Es gilt jedoch:
  - F ist unerfüllbar genau dann, wenn K unerfüllbar ist. (Grundlage des **Resolutionsverfahrens**)

Skolemnisierung ist keine Äquivalenztransformation

- Die Formel $(\exists x)\ p(x) \lor \neg(\exists x)\ p(x)$ ist eine Tautologie.

- Negationsnormalform: $(\exists x)\ p(x) \lor (\forall y)\ \neg p(y)$
- Pränexnormalform: $(\exists x)\ (\forall y)\ (p(x) \lor \neg p(y))$
- Skolemnormalform: $(\forall y)\ (p(a) \lor \neg p(y))$
- Äquivalent dazu: $p(a) \lor \neg(\exists y)\ p(y)$
- Die resultierende Formel ist keine Tautologie!
- z.B. Interpretation I mit
  - $I(p(a)) = f$
  - $I(p(b)) = w$

3.5 Wiederholung Aussagenlogik und Prädikatenlogik



Resolution

Äquivalente Aussagen

Theorie

$\{F_1,\ldots,F_n\}$ hat F_0 als logische Konsequenz

$\{F_1,\ldots,F_n\} \vDash F_0$

$F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow F_0$ ist allgemeingültig

$\underbrace{\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow F_0)}$ ist unerfüllbar

$G_1 \wedge \ldots \wedge G_k$ ist unerfüllbar

- Das Resolutionsverfahren erlaubt die Ableitung eines Widerspruchs aus $G_1 \wedge \ldots \wedge G_k$.

Resolution (Aussagenlogik)

Ist $(p_1 \vee \ldots \vee p_k \vee \mathbf{p} \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_l) \wedge (r_1 \vee \ldots \vee r_m \vee \neg \mathbf{p} \vee \neg s_1 \vee \ldots \vee \neg s_n)$ wahr, dann:

- Eines von **p**, ¬**p** muss falsch sein.
- Also: Eines der anderen Literale muss wahr sein, d.h.

  $p_1 \vee \ldots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_l \vee r_1 \vee \ldots \vee r_m \vee \neg s_1 \vee \ldots \vee \neg s_n$

  muss wahr sein.
- Ergo:

  Ist $p_1 \vee \ldots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_l \vee r_1 \vee \ldots \vee r_m \vee \neg s_1 \vee \ldots \vee \neg s_n$ **unerfüllbar**, dann auch

  $(p_1 \vee \ldots \vee p_k \vee \mathbf{p} \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_l) \wedge (r_1 \vee \ldots \vee r_m \vee \neg \mathbf{p} \vee \neg s_1 \vee \ldots \vee \neg s_n)$

Resolution (Aussagenlogik)

K_1 K_2

$(p_1 \vee \ldots \vee p_k \vee \mathbf{p} \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_l) \quad (r_1 \vee \ldots \vee r_m \vee \neg \mathbf{p} \vee \neg s_1 \vee \ldots \vee \neg s_n)$

Resolutionsschritt

$\{K_1, K_2\} \models K_3$

$p_1 \vee \ldots \vee p_k \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_l \vee r_1 \vee \ldots \vee r_m \vee \neg s_1 \vee \ldots \vee \neg s_n$ K_3

- Aus zwei Klauseln wird eine neue
- Werden Klauseln resolviert, die nur noch aus je einem Atom bzw. negierten Atom bestehen, dann entsteht eine „leere Klausel“, bezeichnet mit $\perp$.

Resolution (Aussagenlogik)

- Vorgehensweise, um einen Widerspruch aus einer Menge M von Klauseln abzuleiten:

1. Wähle zwei Klauseln aus M und erzeuge aus ihnen eine neue Klausel K durch einen Resolutionsschritt.
2. Ist $K = \perp$, dann ist ein Widerspruch gefunden.
3. Falls $K \neq \perp$, füge K zur Menge M hinzu und gehe zu 1.

Resolution (Prädikatenlogik)

- In der Prädikatenlogik müssen bei der Resolution zusätzlich Variablenbindungen mit Hilfe von Substitutionen berücksichtigt werden

- z.B. $(p(X,f(Y)) \vee q(f(X),Y))$ $\quad$ $(\neg p(a,Z) \vee r(Z))$

Resolution mit [X/a, Z/f(Y)] ergibt

$(q(f(a),Y) \vee r(f(Y)))$.

Resolution (Prädikatenlogik) - Beispiel

- Terminologisches Wissen (DL: *TBox*):

  $(\forall X)$ (human(X) $\rightarrow$ $(\exists Y)$ parent_of(Y,X))

  $(\forall X)$ (orphan(X) $\leftrightarrow$ (human(X) $\wedge$ $\neg(\exists Y)$ (parent_of(Y,X) $\wedge$ alive(Y)))

- Wissen um Individuen (DL: *ABox*):

  orphan(harrypotter)

  parent_of(jamespotter,harrypotter)

- Können wir folgern: ¬alive(jamespotter)?

Resolution (Prädikatenlogik) - Beispiel

- Zu zeigen:

$$((\forall X)\ (\ human(X) \rightarrow (\exists Y)\ parent\_of(Y,X)\ )$$
$$\wedge\ (\forall X)\ (orphan(X) \leftrightarrow (human(X) \wedge \neg(\exists Y)\ (parent\_of(Y,X) \wedge alive(Y)))$$
$$\wedge\ orphan(harrypotter)$$
$$\wedge\ parent\_of(jamespotter,harrypotter)$$
$$)\ \rightarrow\ \neg alive(jamespotter))$$

ist allgemeingültig.

Resolution (Prädikatenlogik) - Beispiel

- Zu zeigen:

$\neg((\forall X)\ (\ human(X) \rightarrow (\exists Y)\ parent\_of(Y,X)\ )$

$\wedge\ (\forall X)\ (orphan(X) \leftrightarrow (human(X) \wedge \neg(\exists Y)\ (parent\_of(Y,X) \wedge alive(Y)))$

$\wedge\ orphan(harrypotter)$

$\wedge\ parent\_of(jamespotter,harrypotter)$

$)\ \rightarrow\ \neg alive(jamespotter))$

ist *unerfüllbar*.

Resolution (Prädikatenlogik) - Beispiel

- Pränexnormalform:

$(\forall X)(\exists Y)(\forall X1)(\forall Y1)(\forall X2)(\exists Y2)$

$((\neg human(X) \vee parent\_of(Y,X))$

$\wedge (\neg orphan(X1) \vee (human(X1) \wedge (\neg parent\_of(Y1,X1) \vee \neg alive(Y1)))$

$\wedge (orphan(X2) \vee (\neg human(X2) \vee (parent\_of(Y2,X2) \wedge alive(Y2)))$

$\wedge orphan(harrypotter)$

$\wedge parent\_of(jamespotter,harrypotter))$

$\wedge alive(jamespotter))$

Resolution (Prädikatenlogik) - Beispiel

- Klauselform:

$(\neg human(X) \vee parent\_of(f(X),X))$

$\wedge (\neg orphan(X1) \vee human(X1))$

$\wedge (\neg orphan(X1) \vee \neg parent\_of(Y1,X1) \vee \neg alive(Y1))$

$\wedge (orphan(X2) \vee \neg human(X2) \vee parent\_of(g(X,X1,Y1,X2),X2))$

$\wedge (orphan(X2) \vee \neg human(X2) \vee alive(g(X,X1,Y1,X2)))$

$\wedge\ orphan(harrypotter)$

$\wedge\ parent\_of(jamespotter,harrypotter))$

$\wedge\ alive(jamespotter)$

Resolution (Prädikatenlogik) - Beispiel

Wissen:

1. (¬human(X) ∨ parent_of(f(X),X))
2. ∧ (¬orphan(X1) ∨ human(X1))
3. ∧ (¬orphan(X1) ∨ ¬parent_of(Y1,X1)
   ∨ ¬alive(Y1))
4. ∧ (orphan(X2) ∨ ¬human(X2)
   ∨parent_of(g(X,X1,Y1,X2),X2))
5. ∧ (orphan(X2) ∨ ¬human(X2)
   ∨ alive(g(X,X1,Y1,X2)))
6. ∧ orphan(harrypotter)
7. ∧ parent_of(jamespotter,harrypotter))
8. ∧ alive(jamespotter)

Abgeleitete Klauseln:

9. ¬orphan(harrypotter)
   ∨ ¬alive(jamespotter) (3,7)
10. ¬orphan(harrypotter) (8,9)
11. ⊥ (6,10)

3.5 Wiederholung Aussagenlogik und Prädikatenlogik

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Eigenschaften der Prädikatenlogik

- **Monotonie**
  - Bei Vergrößerung des Wissens gehen keine Schlussfolgerungen verloren.
- **Kompaktheit**
  - Für jede Schlussfolgerung aus einer Theorie genügt eine endliche Teilmenge der Theorie.
- **Semientscheidbarkeit**
  - Alle wahren Schlüsse lassen sich finden, wenn man lange genug sucht.

Eigenschaften der Aussagenlogik

- Alle genannten Eigenschaften der Prädikatenlogik.
- **Entscheidbarkeit**
  - Alle ***wahren*** Schlüsse lassen sich finden, und alle ***falschen*** Schlüsse lassen sich widerlegen, wenn man lange genug sucht.
- D.h. es gibt *immer terminierende* automatische Beweiser.

Wichtige Fragmente der Prädikatenlogik

- Aussagenlogik
- Datalog (wie pures/reines Prolog, aber ohne Funktionssymbole)
    - entscheidbar
- Disjunktives Datalog (Klauseln ohne Funktionssymbole)
    - entscheidbar
- Hornklauseln (pures/reines Prolog)
    - seminentscheidbar
- Beschreibungslogiken
    - entscheidbar (manche)
    - z.B. OWL → nächster Teil der Vorlesung

3.5 Wiederholung Aussagenlogik und Prädikatenlogik

- 3.5.1 Logik Grundlagen
- 3.5.2 Modelltheoretische Semantik
- 3.5.3 Normalformen
- 3.5.4 Resolution
- 3.5.5 Eigenschaften von PL und FOL

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

3. Wissensrepräsentationen

3.0 Motivation

3.1 Ontologien in der Philosophie

3.2 Ontologien in der Informatik

3.3 Ontolgie Beschreibungssprachen

3.4 Ontologietypen

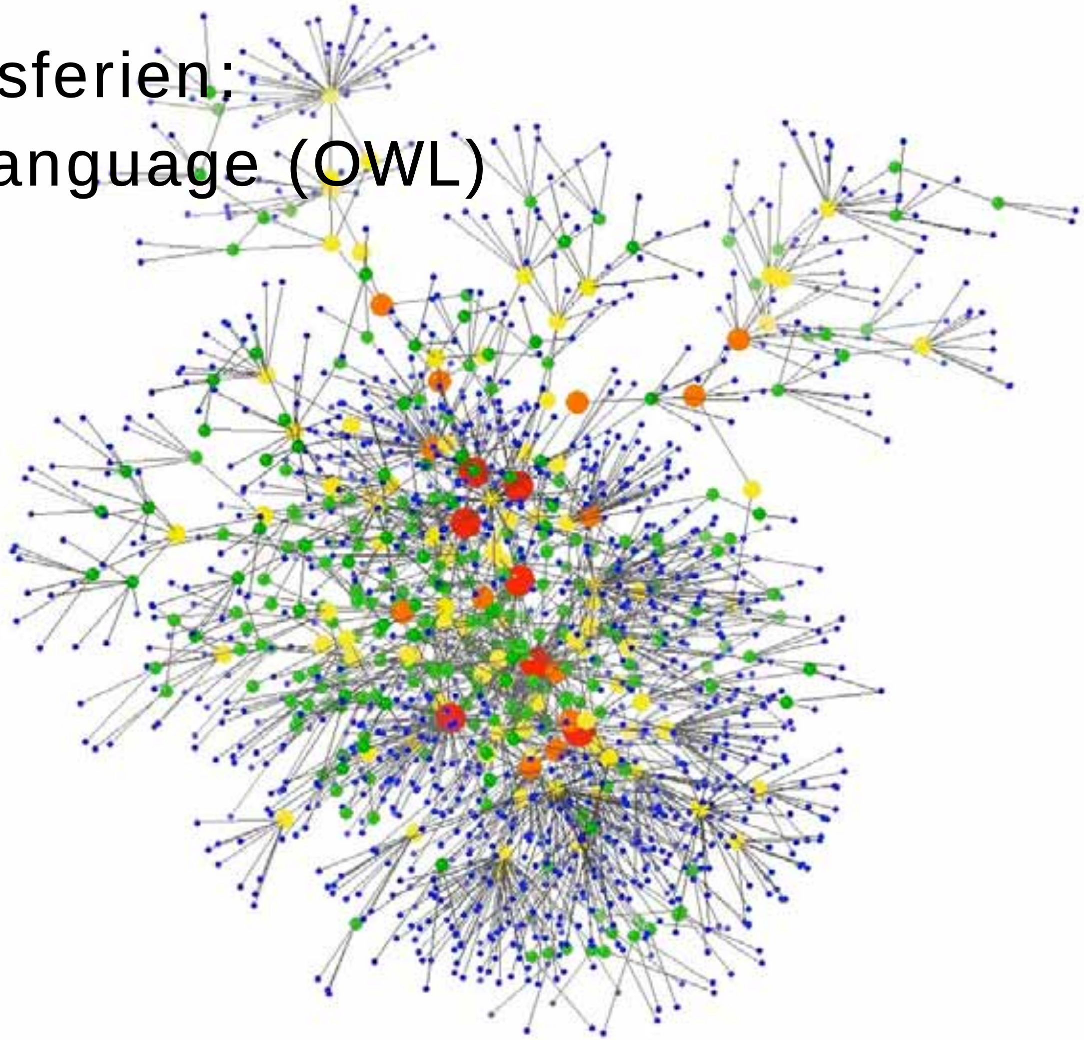
3.5 Wiederholung Aussagenlogik und Prädikatenlogik

3.6 Beschreibungslogiken und Web Ontology Language OWL

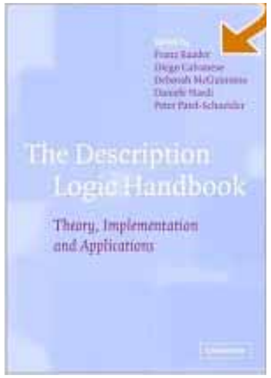
3.7 Regeln mit SWRL / RIF

3.8 Logikbasierte Systeme

Nach den Weihnachtsferien:
Web Ontology Language (OWL)



Literatur



» F. Baader, D. Calvanese, D. McGuinness
The Description Logics Handbook
Cambridge University Press, 2003.

» U. Schöning
Logik für Informatiker,
Spektrum Akademischer Verlag, 5.Aufl. 2000

Literatur

- Blog
  http://sw0809.blogspot.com/
- Materialien-Webseite
  http://www.hpi.uni-potsdam.de/meinel/teaching/semantic_web_ws08090.html

- bibsonomy - Bookmarks
  http://www.bibsonomy.org/user/lysander07/sw0809-07