Wintersemester 2003-2004
Übung zur Vorlesung
Diskrete Strukturen und Logik

Universität Trier
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Meinel/Klotz (klotz@ti.uni-trier.de)

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: Freitag, 06. Februar 2004, 14:00
Erreichbare Punkte: 12

URL: http://www.informatik.uni-trier.de/TI/Lehre/2003-2004/dsl/blatt12.ps (blatt12.pdf)

Themen: Induktionsbeweis

Allgemeines: Dieses Blatt ist das vorletzte Blatt in der zweiten Semesterhälfte. Am 06. Februar wird das letzte Übungsblatt und ein Zusatzblatt mit Zusatzaufgaben für die erste und zweite Semesterhälfte ausgeteilt.

Aufgabe 1: 4 Punkte

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und alle Mengen M und N mit $|M| = n + 1$ und $|N| = n$ und alle Abbildungen $f : M \to N$ gilt: f ist nicht injektiv.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Das folgende Spiel ist als die Türme von Hanoi bekannt. Man hat 3 vertikale Stangen: A, B und C. Auf der ersten Stange A befinden sich n Scheiben, welche verschiedene Größen haben. Wenn eine Scheibe a auf einer Scheibe b liegt, ist b größer als a. Die Stangen B und C sind leer. Man muss die Scheiben auf die 3. Stange C übertragen, so dass sie sich in gleicher Ordnung befinden werden. Bei jedem Schritt darf nur eine Scheibe von einer Stange auf eine andere Stange und dabei niemals auf eine kleinere Scheibe gelegt werden. Für weitere Erklärungen betrachten Sie zum Beispiel folgende Seite: "`http://mond.at/mathe/hanoi.html`". Hier gibt es einen Link auf ein Simulationsprogramm, wobei die Anzahl der Scheiben n eingestellt werden kann.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n, dass die Übertragung in $(2^n - 1)$ Schritten gemacht werden kann. Bei einer zusätzlichen Bedingung, dass eine Scheibe nur zwischen benachbarten Stangen, d.h. zwischen A und B oder zwischen B und C übertragen werden darf, kann die Übertragung in $(3^n - 1)$ Schritten gemacht werden. Beweisen Sie auch diese Behauptung.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Die Menge der aussagenlogischen Formeln sei induktiv wie in der Vorlesung definiert:
Basismenge: w, f, x_0, x_1, ... sind aussagenlogische Formeln.
Erzeugungsregeln: Seien α und β aussagenlogische Formeln. Dann sind auch $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ und $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ aussagenlogische Formeln.
Es ist nun folgender Satz zu beweisen:
Sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Dann gibt es eine aussagenlogische Formel ϕ', in der nur $\Rightarrow$ als Verknüpfungszeichen vorkommt und die logisch äquivalent zu ϕ ist.
Der Beweis ist ohne Ausnutzung der Resultate eines ähnlichen Satzes der Vorlesung (in dem das Resultat für $\neg$ und $\wedge$ bewiesen wurde) zu führen (natürlich kann dieselbe Beweisstruktur verwendet werden).