Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie
Meinel/Klotz

Universität Trier
Wintersemester 2003/04

Lösungen zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:
Zu zeigen: Jede Instanz von KNAPSACK kann in Zeit $\mathcal{O}(nW)$ gelöst werden, wobei n die Anzahl der Gegenstände und W die Gewichtsgrenze ist.

- $V(w,i)$ sei der maximale Wert, der erreicht wird, indem wir unter den ersten i Elementen genau die auswählen, so daß ihr Gewicht exakt $w \leq W$ ist.
- Wir legen eine Tabelle an mit $n \cdot W$ Einträgen, für die $V(w,i)$ für aufsteigendes i berechnet wird.
- $V(w,i+1) = \max\{V(w,i), v_{i+1} + V(w-w_{i+1}, i)\}$, Startwert: $V(w,0)=0$, für alle w.
- Die Antwort für die gegebene Instanz des KNAPSACK-Problems lautet 'yes', falls die Tabelle einen Eintrag $V(w,i) \geq k$ (k=Zielwert) enthält.

- Bsp.: Sei $n=4$, $W=11$, $k=13$,

I	v_i	w_i
1	1	2
2	4	3
3	3	6
4	8	5

  - Ergebnistabelle:

i/W	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		(1),2									
2			(2),4		(1,2),5						
3						(3),3		(1,3),4	(2,3),7		(1,2,3),8
4					(4),8		(1,4),9	(2,4),12		(1,2,4),13	(3,4),11

  - $V(10,4)=13 \geq k$, Antwort: 'yes'

- Folgt aus dieser Lösung NP=P (da KNAPSACK nachweislich NP-vollständig) ?
  - Nein, der Algorithmus ist zwar polynomial, aber nicht in Bezug auf die Länge der Kodierung der Eingabe. Diese beträgt nämlich etwa $n \cdot \log W$!
  - Bemerkung: Es handelt sich um einen pseudopolynomialen Algorithmus.

Aufgabe 2:

FEEDBACK	Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph, $k \in \mathbb{N}$.
EDGE SET	Ein Feedback-edge-set F ist eine Kantenmenge $F \subseteq E$, für die gilt, daß jeder Kreis in G eine Kante aus F enthält.
	Frage: Enthält der Graph G einen Feedback-edge-set F, $\lvert F\rvert=k$?

Zu zeigen: Ist FEEDBACK EDGE SET NP-vollständig ?

(a) FEEDBACK EDGE SET $\in$ NP

- Rate Feedback-edge-set F.
- Prüfe Feedback-edge-set Eigenschaft:
  - Prüfe, ob $(E-F)$ kreisfrei, d.h. für alle Kanten $(v,w) \in (E-F)$ prüfe, ob v über w wieder erreichbar. ($\mathcal{O}(n^4)$)
  - und prüfe, ob alle Kanten $(v,w) \in F$ auf einem Kreis liegen, d.h. ist für alle Kanten $(v,w) \in F$ v über w erreichbar. ($\mathcal{O}(n^4)$)

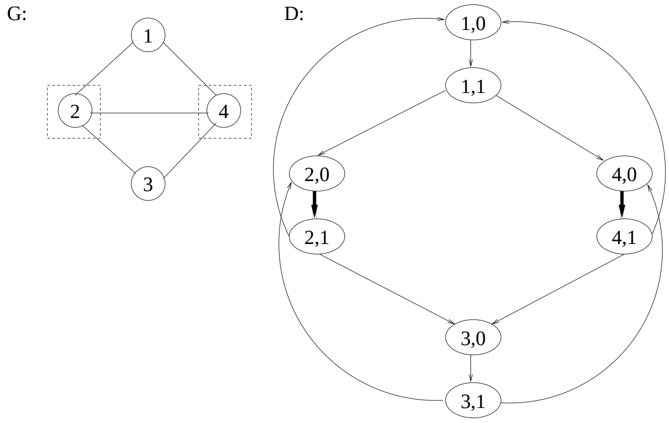
– $\Rightarrow$ Algorithmus ist polynomiell $\Rightarrow$ FEEDBACK EDGE SET $\in$ NP.

(b) NODE COVER $\leq$ FEEDBACK EDGE SET

– Wir konstruieren aus einem ungerichteten Graphen G einen gerichteten Graphen D, der genau dann eine Feedback-edge-set mit k Elementen enthält, wenn G eine Knotenüberdeckung mit k Elementen enthält.

– Konstruktion der Reduktion
  * Seit $G=(V,E)$ ungerichteter Graph.
    Wir konstruieren einen gerichteten Graphen $D=(V\times\{0,1\},E')$ mit E':
    · $((v,0),(v,1))\in E'$, für alle $v\in V$
    · $((v,1),(w,0))\in E'$ und $((w,1),(v,0))\in E'$ für alle Kanten $(v,w)\in E$

– Beispiel



– Korrektheit der Reduktion

$'\Leftarrow'$
· Sei $F\subseteq E$ Feedback-edge-set von D, $|F|=k$.
· $\Rightarrow$ F enthält mindestens eine Kante pro Kreis von D.
· Ersetze alle Kanten $((v,1),(w,0))\in F$ durch $((w,0),(w,1))$ und konstruiere so F'.
· $|F'|\leq|F|$, F' beinhaltet immer noch mind. eine Kante jedes Kreises aus D (die einzige Kante, die $(w,0)$ verläßt, verläuft von $(w,0)$ nach $(w,1)$, daher muß $((w,0),(w,1))$ auf dem Kreis liegen, der $((v,1),(w,0))$ enthält).
· O.B.d.A. setzen wir $F'=\{((v_i,0),(v_i,1))|1\leq i\leq k\}$.
· $\Rightarrow$ Jeder Kreis in D enthält Kante $((v_i,0),(v_i,1))$
· Wenn $(x,y)\in E$, dann folgt aus Konstruktion:
  $((x,1),(y,0)),((y,0),(y,1)),((y,1),(x,0)),((x,0),(x,1))$ ist Kreis in D.
· Somit inzidiert jede Kante aus G mit einem v_i, $1\leq i\leq k$
· $\Rightarrow$ $\{v_1,\ldots,v_k\}$ ist Knotenüberdeckung in G.

$'\Rightarrow'$
· Sei M eine Knotenüberdeckung in G, $|M|=k$.
· $\Rightarrow$ Für alle Kanten $(v,w)\in E$ gilt: entweder $v\in M$ oder $w\in M$.
· Da gemäß Konstruktion gilt: Wenn $(v,w)\in E$, dann folgt aus Konstruktion:
  $((v,1),(w,0)),((w,0),(w,1)),((w,1),(v,0)),((v,0),(v,1))$ ist Kreis in D.
· Falls $v\in M$, dann ist $((v,0),(v,1))\in F$, falls $w\in M$, dann ist $((w,0),(w,1))\in F$.
· Da jede Kante $(v,w)\in E$ durch einen der beiden Knoten v,w aus M überdeckt ist, folgt, daß jeder Kreis in D durch eine entsprechend induzierte Kante aus F überdeckt wird.
· $\Rightarrow$ F ist Feedback-edge-set für D mit $|F|=|M|=k$.

– Ressourcenbedarf der Reduktion
  * Knotenmenge wird verdoppelt: $|V'|=2|V|$
  * Kanten: $|E'|=2|E|+|V|$
  * $\Rightarrow$ Konstruktion der neuen Adjazenzmatrix in polynomialer Zeit
  * Zwischenspeicher nur für eine Kante nötig $\Rightarrow$ logarithmischer Speicherplatz.