

Zu mathematischen Argumentationen eines Experten aus einer semiotischen Perspektive

In Argumentationen unter in der Forschung tätigen Mathematikern kombiniert die erklärende Person Gesten, Sprache und Zeichen und verleiht damit unter anderem den concept images der verwendeten mathematischen Begriffe Ausdruck. Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, inwiefern eine multimodale Analyse von erklärenden Phasen in Argumentationen von Experten mit dem Fokus auf Begriffsbildungsprozessen Aufschluss geben kann über operationale und strukturelle Vorstellungen von Begriffen (Sfard, 1991).

Theoretischer Rahmen

Dabei soll wie bei Tall und Vinner (1981) unter dem Concept Image zu einem mathematischen Begriff die gesamte kognitive Struktur, welche mit diesem Begriff assoziiert wird, verstanden werden. Diese beinhaltet neben allen mentalen Bildern auch mit dem Begriff verknüpfte Eigenschaften und Prozesse und wird geformt durch die unterschiedlichen Erfahrungen, welche die Person im Laufe ihres Lebens macht. Mit der hier vorgestellten Analyse wird nicht der Anspruch erhoben, diese, bisher an nur wenigen Beispielen erforschte, Struktur erschöpfend zu beschreiben, sondern es wird vielmehr untersucht, ob Gesten als zunehmend mehr in den Blick von Mathematikdidaktiker(inne)n geratendes Ausdrucksmittel neben Sprache und Schrift in systematischer Art und Weise als Informationsquelle genutzt werden können. Im Sinne eines Erkenntnisgewinns für die Mathematikdidaktik durch eine Analyse des Gesteneinsatzes argumentieren Marghetis, Edwards und Núñez (2014) unter Berufung auf Goldin-Meadow, Goodwin, Kendon und McNeill, dass wesentliche Aspekte kommunikativer Praxis ohne den erweiterten Blick, welcher den Körper der/s Mathematiker(in) einbezieht, unsichtbar bleiben.

Ein dem Welle-Teilchen-Dualismus verwandtes Verhältnis von strukturellen und operationalen Aspekten mathematischer Begriffe proklamiert Sfard (1991), wobei ersteres die Auffassung des mathematischen Begriffs als abstraktes Objekt und letzteres als Prozess, Algorithmus oder Handlung meint.

Hintergründe und Werkzeuge der Analyse

Im November 2015 behauptet der Gödel- und Donald Knuth-Preisträger László Babai, das Graphen-Isomorphismus-Problem in quasi-polynomieller Zeit berechnen zu können. Dem mit dieser Behauptung entstehenden Begründungsbedarf begegnet er unter anderem, indem er vor verschiedenen

Auditorien über seine Beweisidee vorträgt und Fragen beantwortet, sowie einen ausgearbeiteten Beweis unter <https://arxiv.org/abs/1512.03547> veröffentlicht. Aktuell bestehen keine Einwände gegen die Korrektheit seiner Behauptung, wobei der Artikel noch nicht vollständig durch Fachleute begutachtet wurde.

Um die Bedeutung von Gesten in Erklärungen von Experten genauer zu untersuchen, wurde der videographierte erste Vortrag im Seminar für Kombinatorik und Theoretische Informatik an der Universität von Chicago im Rahmen einer dreiteiligen Vortragsreihe von Babai nach Gesten sequenziert und zur Hypothesengenerierung in einem ersten Schritt mit der von Krause (2016) erläuterten Gestenklassifikation analysiert. Im Hinblick auf die Fragestellung sind vor allem thematische Gesten von Interesse, weshalb Gesten zunächst als entweder interaktiv, also sich auf den Kommunikationsvorgang beziehend, oder thematisch (topical/representational) klassifiziert wurden. In einem nächsten Schritt wurde für thematische nicht-deiktische Gesten die Einteilung von Marghetis, Edwards und Núñez (2014) in dynamische, statische und ambivalente Gesten herangezogen. Dabei besteht eine dynamische Geste aus fließenden ununterbrochenen Bewegungen, wohingegen eine statische Geste aus abgehackten und segmentierten Bewegungen oder einer dynamischen von Staccato-Gesten begrenzten Bewegung besteht. Als ambivalent bezeichnen sie alle Gesten, die keiner der beiden Kategorien zuzuordnen sind.

Analyse

Im folgenden geglätteten Transkriptausschnitt (12:04-12:42) führt Babai den Begriff einer Zeichenkette (string) ein, um anschließend zu erläutern, was unter dem String-Isomorphismus-Problem verstanden wird. Später erklärt er, wie das Graphen-Isomorphismus-Problem als Spezialfall des String-Isomorphismus-Problems aufgefasst werden kann.

Die eingangs aufgeworfene Frage konkretisiert sich somit zu: Inwiefern liefert eine geeignete Klassifikation von Gesten Anhaltspunkte, um operationale und strukturelle Aspekte von Begriffen nach Sfard (1991) in Babais Concept Image einer Zeichenkette zu identifizieren?

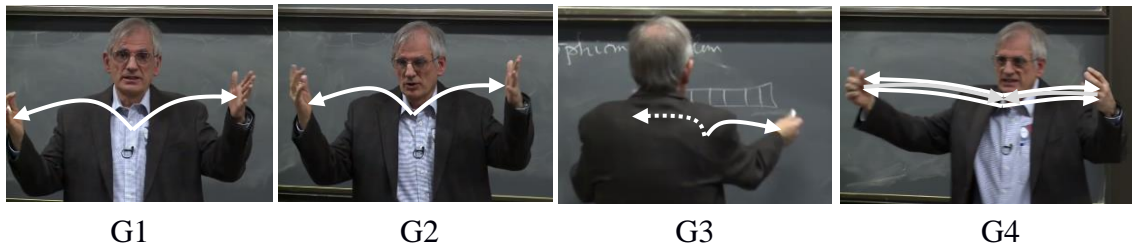
Im Folgenden steht eine gepunktete Unterstreichung für einen parallel zur Sprache stattfindenden Tafelanschrieb, während eine einfache Unterstreichung eine gleichzeitig mit diesen Worten auftretende als interaktiv klassifizierte Geste anzeigt. Für als thematisch klassifizierte Gesten sind die zugehörigen Worte zweifach durchgehend unterstrichen.

So, what is a string? A string over Omega would be, simply, a function from Omega to some alphabet. [*schreibt „ $x: \Omega \rightarrow ABC$ “ an die Tafel*] Ok?

So, I have some finite alphabet and to every element of Omega I assign [G1] a letter.

Er, you you could think of it as as assigning colors, so I am coloring [G2] that set, but I don't want to refer to them as colors, because I will have a different meaning for colors. So, let's think of it as letters.

So er, so a string, so for instance if, if erm [skizziert ein Rechteck an die Tafel und unterteilt dies in 8 nebeneinanderliegende etwa quadratische Felder] this is my set [G3] of positions here, then this is a string. Ok? [schreibt die Buchstaben AABCCACB in die Felder des Rechtecks] That's a string. Ok?



In diesen 4 Gesten bewegt Babai seine Hände symmetrisch zur Körperachse beginnend etwa auf Herzhöhe und mit nach innen gerichteten Handflächen in einer gleichmäßigen horizontalen Bewegung entsprechend der Pfeile. Dabei sind in G1 und G2 die Finger abgespreizt, wohingegen in G4 (13:12, nicht Teil des Transkriptausschnitts) die fast senkrecht zur Handfläche stehenden Finger in Richtung der jeweils anderen Hand zeigen. In G3 verdeckt der Körper die linke Hand.

Die deiktische Geste G3 verweist auf die Visualisierung des Definitionsbereichs von einer Zeichenkette als endliches Band mit 8 Feldern, von denen in jedes anschließend jeweils ein Buchstabe geschrieben wird. Das Resultat dieser Handlung steht für eine Zeichenkette als Objekt, mit dem weiter operiert werden kann, repräsentiert also eine strukturelle Vorstellung von einer Zeichenkette. Auch die als ambivalent eingestufte Geste G4, welche mit der Wortgruppe „in this set Omega“ auftritt, bezieht sich auf ein mentales Abbild dieser Darstellung.

Die Gesten G1 und G2 treten parallel zur Artikulation der Verben „assign“ und „coloring“ auf. Sie wurden als dynamisch klassifiziert und interpretiert als Hinweis auf eine operationale Vorstellung von einer Zeichenkette. Diese Interpretation ergibt sich, weil sowohl die simultane Sprache als auch die offene Handhaltung auf eine Zuordnungsvorstellung von Buchstaben als Elemente des Alphabets „ABC“ zu „Positionen“ als Elementen des Definitionsbereichs „ Ω “ hinweisen. Die Handlung des Zuweisens wird anschließend durch das Eintragen der Buchstaben vollzogen.

Fazit und Ausblick

Gesten treten auch in der kommunikativen Praxis mathematischer Forschung auf und werden, wie hier durch den renommierten Mathematiker Babai, in erklärenden Vorträgen als Teil einer Argumentation zur Befriedigung eines Begründungsbedarfs eingesetzt. Am Beispiel des Begriffs einer Zeichenkette wurde exemplarisch angedeutet, wie eine multimodale Analyse mit dem Fokus auf Gesten Auskunft über Vorstellungen der Vortragenden Person von mathematischen Begriffen geben kann. Dabei hat sich gezeigt, dass die Klassifikation der thematischen Gesten in deiktische, dynamische, statische und ambivalente Gesten in Kombination mit Sprache und Inskription wichtige Anhaltspunkte für die Rekonstruktion struktureller und operationaler Vorstellungen von mathematischen Begriffen liefert, wobei ein detaillierter Blick, der auch die Haltung der Hände einbezieht, notwendig ist.

Im Hinblick auf Objekt- und Handlungsvorstellungen in den Concept Images von mathematischen Begriffen scheint eine feinere Klassifikation der deiktischen Gesten wünschenswert. Weiterhin könnte eine jegliche statischen, sowie mit G4 verwandte ambivalente Gesten umfassende Klasse von Gesten besser zur Untersuchung operationaler und struktureller Vorstellungen geeignet sein. Eine solche Klassifikation zu entwickeln bedarf jedoch weiterführender Untersuchungen vortragender Wissenschaftler. Ambivalente Gesten ganz auszuschließen scheint vor dem Hintergrund der Dualität struktureller und operationaler Vorstellungen nicht möglich. Abschließend gilt es zu betonen, dass eine solche Gestenklassifikation nur in Kombination mit Sprache und Inskription ein hilfreiches Werkzeug sein kann.

Literatur

- Krause, C. M. (2016). *The mathematics in our hands: How gestures contribute to constructing mathematical knowledge*. Springer.
- Marghetis, T., Edwards, L. D., & Núñez, R. (2014). More than mere handwaving: Gesture and embodiment in expert mathematical proof. *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics*. Charlotte: IAP-Information Age Publishing, 227-246.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- The University of Chicago. *Graph Isomorphism in Quasipolynomial Time I Seminar Lecture -1*. Abgerufen am 20.12.2016 <https://www.youtube.com/watch?v=qYlhA3O9Nz0&t=1996s> YouTube-Video.