HPI Hasso Plattner Institut

IT Systems Engineering | Universität Potsdam

Der Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

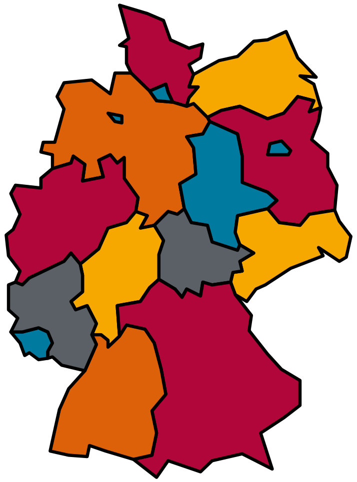
Thomas Bläsius

Code Night – 07.11.2015

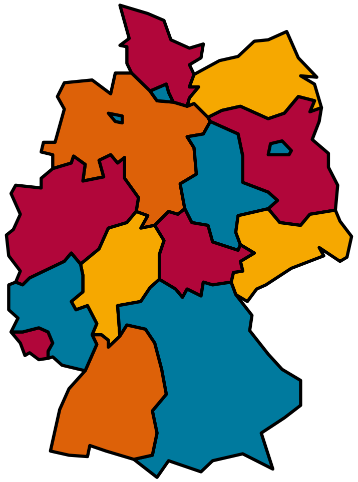
Bunte Landkarten

1

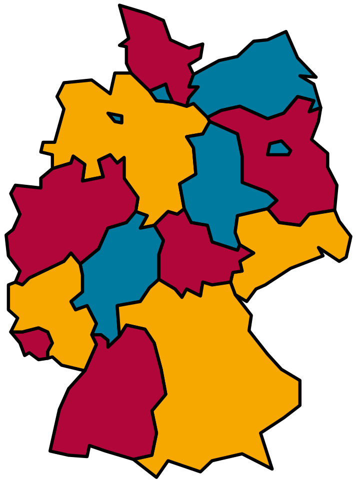
Problem
Färbe eine Landkarte, sodass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.



5 Farben



4 Farben

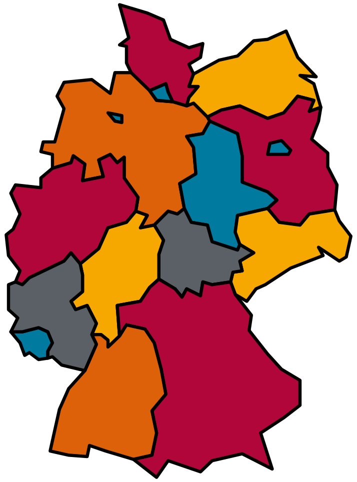


ungültige Färbung

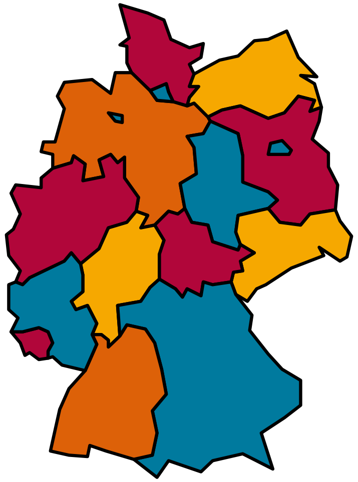
Bunte Landkarten

1

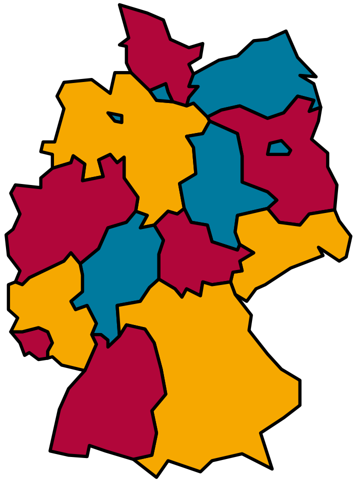
Problem
Färbe eine Landkarte, sodass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.



5 Farben



4 Farben



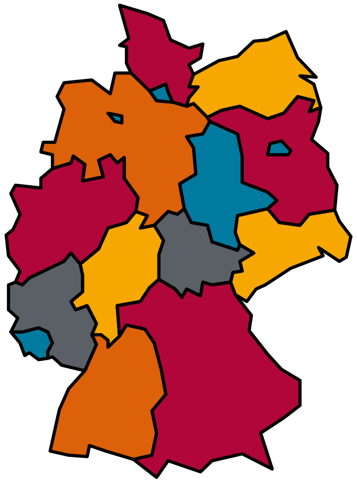
ungültige Färbung

Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

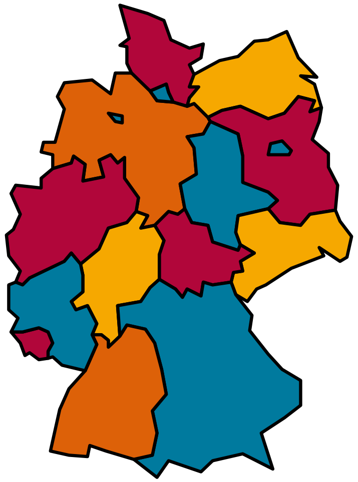
Bunte Landkarten

1

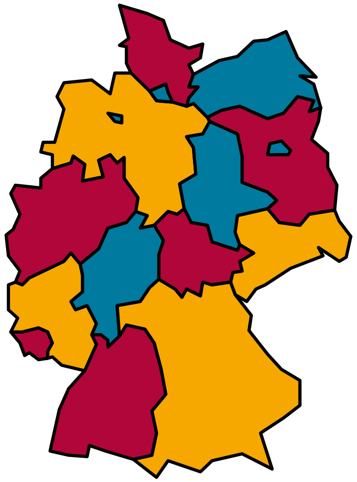
Problem
Färbe eine Landkarte, sodass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.



5 Farben



4 Farben



ungültige Färbung

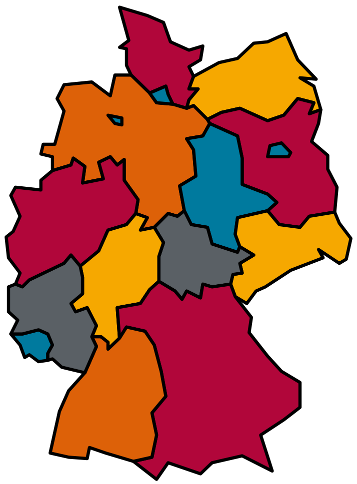
Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

Beweis: super schwer

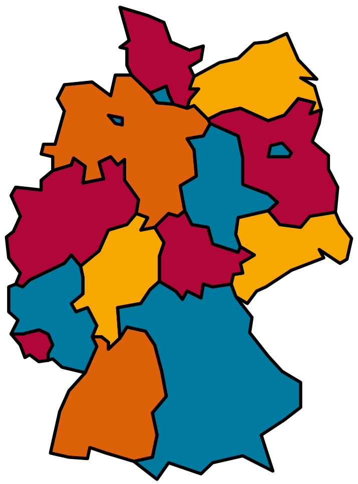
Bunte Landkarten

1

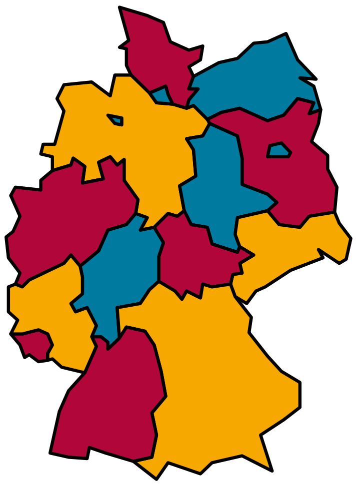
Problem
Färbe eine Landkarte, sodass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.



5 Farben



4 Farben



ungültige Färbung

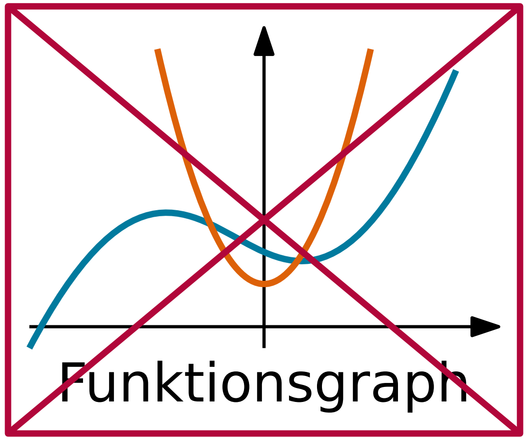
Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

Beweis: super schwer

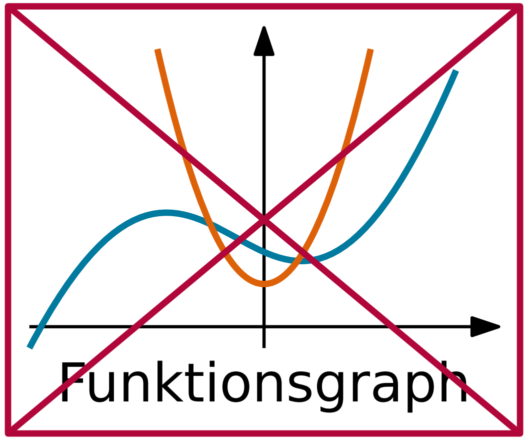
Heute: Färbung mit 6 Farben

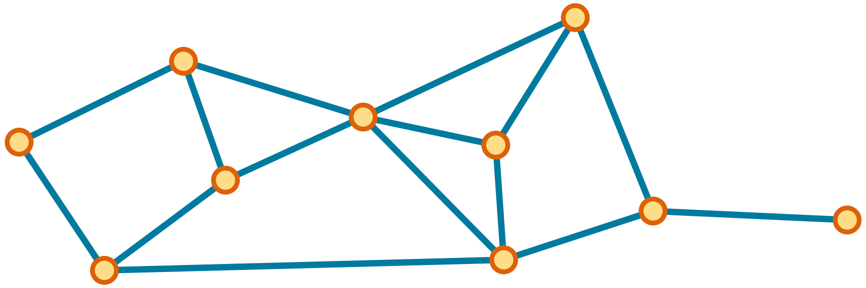
Hilfsmittel: Graphen

Hilfsmittel: Graphen



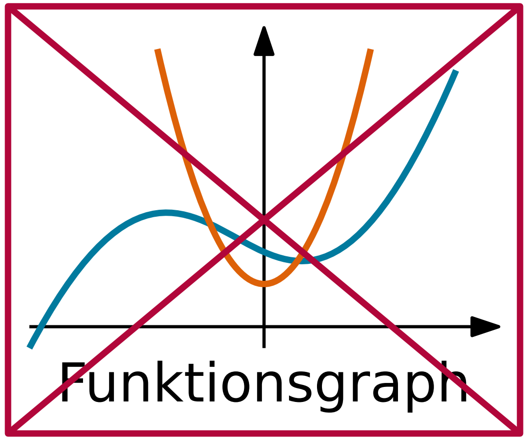
Hilfsmittel: Graphen



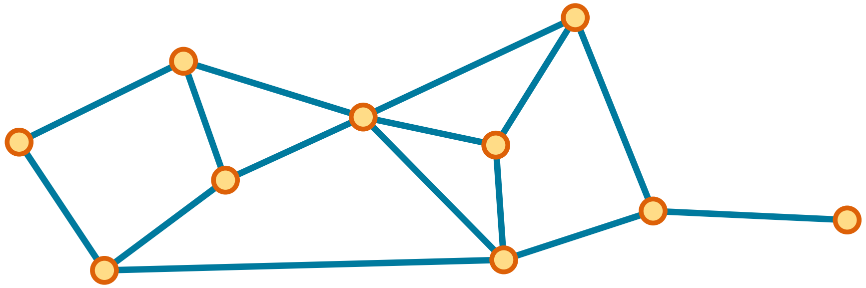


ein Graph mit Knoten und Kanten

Hilfsmittel: Graphen

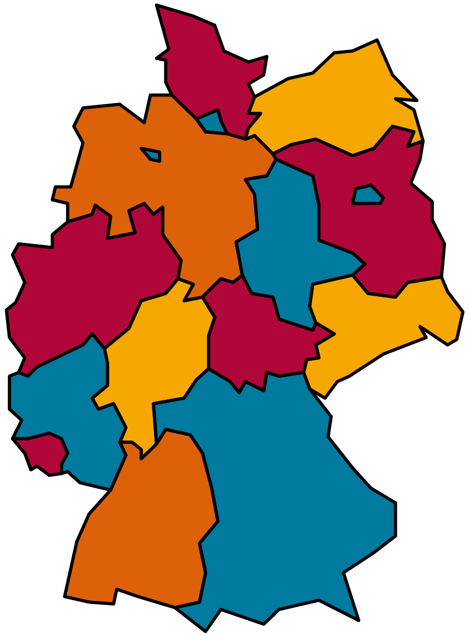


Funktionsgraph

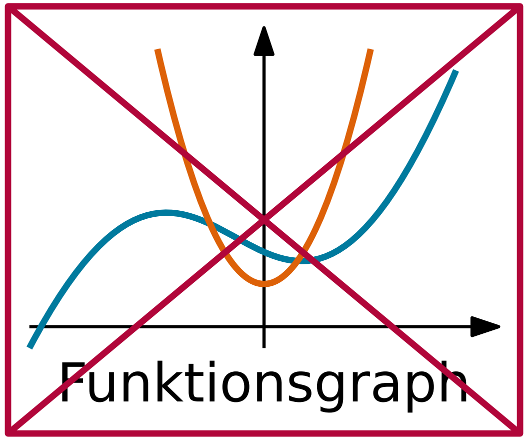


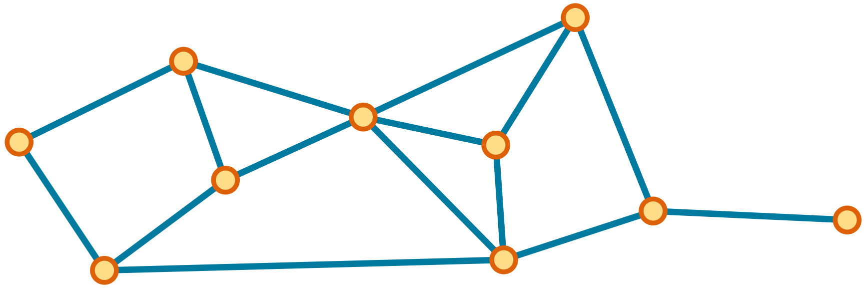
ein Graph mit Knoten und Kanten

Was haben Graphen mit Landkarten zu tun?



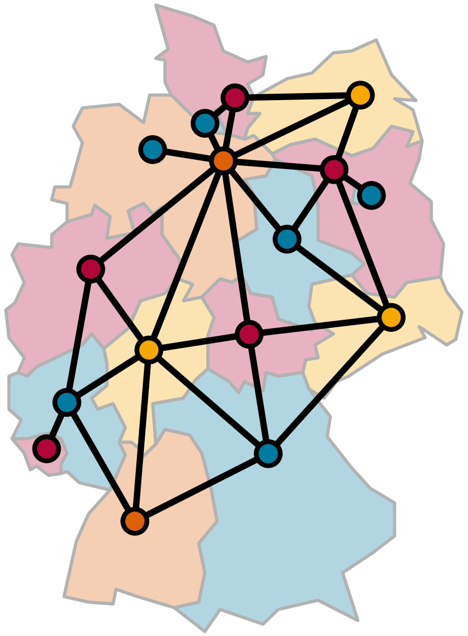
Hilfsmittel: Graphen





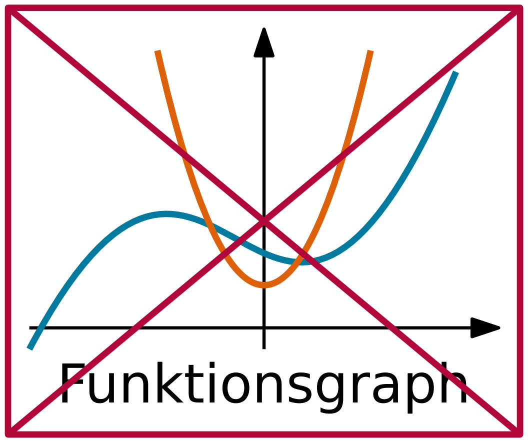
ein Graph mit Knoten und Kanten

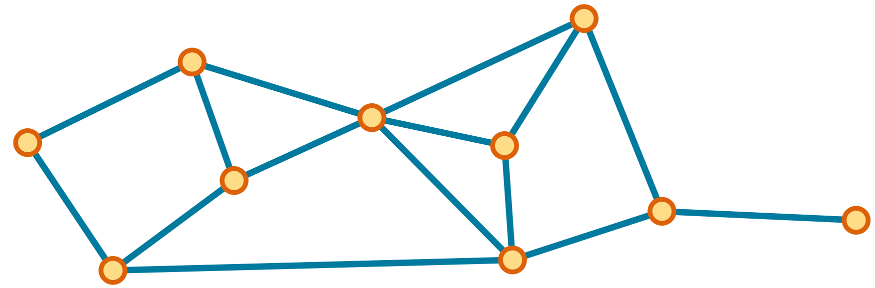
Was haben Graphen mit Landkarten zu tun?



- eine Landkarten modelliert als Graphen
  - Länder sind Knoten
  - benachbarte Länder sind durch eine Kante verbunden

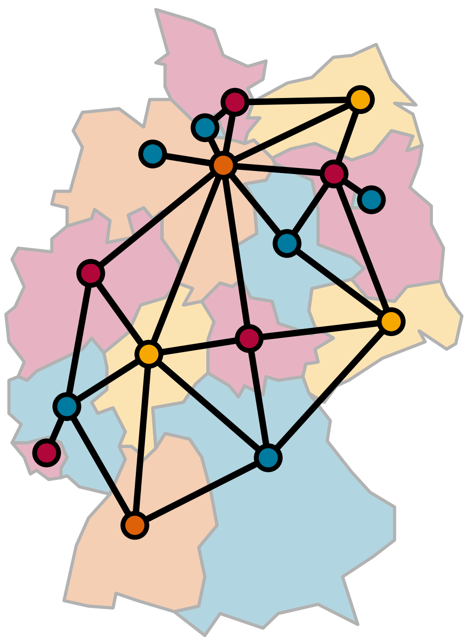
Hilfsmittel: Graphen





ein Graph mit Knoten und Kanten

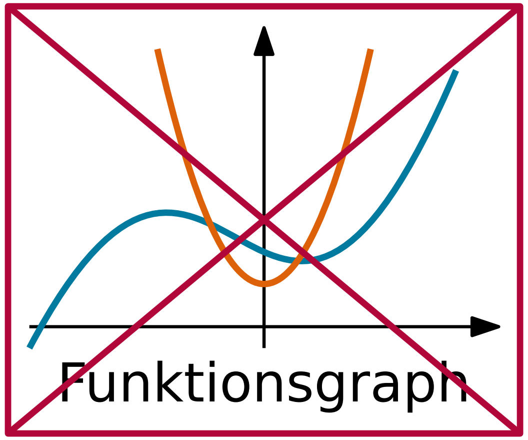
Was haben Graphen mit Landkarten zu tun?

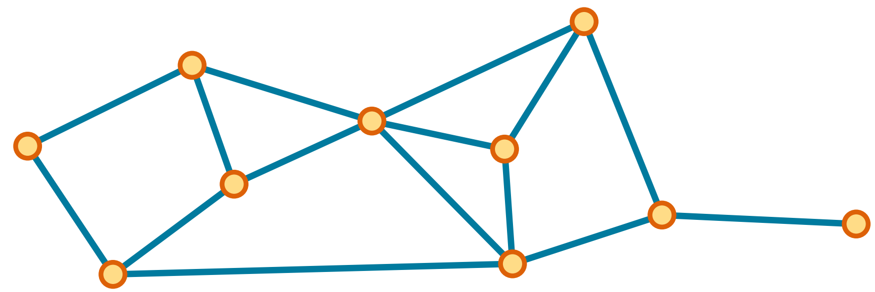


- eine Landkarten modelliert als Graphen
  - Länder sind Knoten
  - benachbarte Länder sind durch eine Kante verbunden

Problem
Färbe eine Landkarte, sodass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.

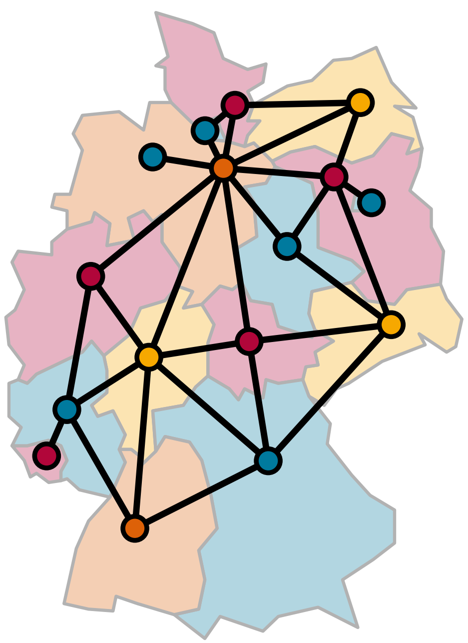
Hilfsmittel: Graphen





ein Graph mit Knoten und Kanten

Was haben Graphen mit Landkarten zu tun?



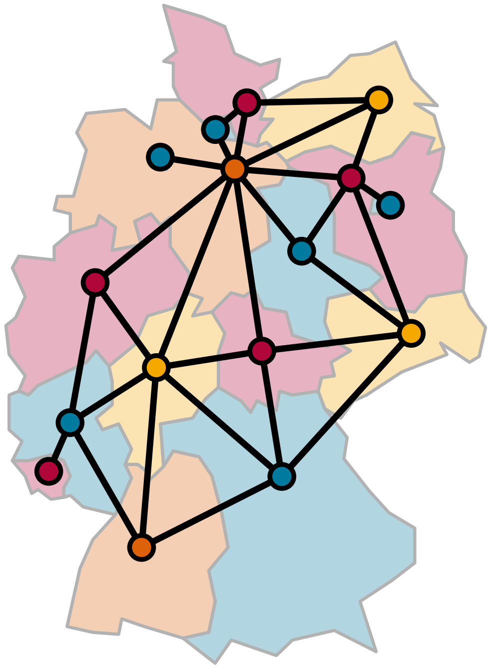
- eine Landkarten modelliert als Graphen
  - Länder sind Knoten
  - benachbarte Länder sind durch eine Kante verbunden

Problem

Färbe ~~eine Landkarte~~ einen Graphen, sodass benachbarte ~~Länder~~ Knoten unterschiedliche Farben haben.

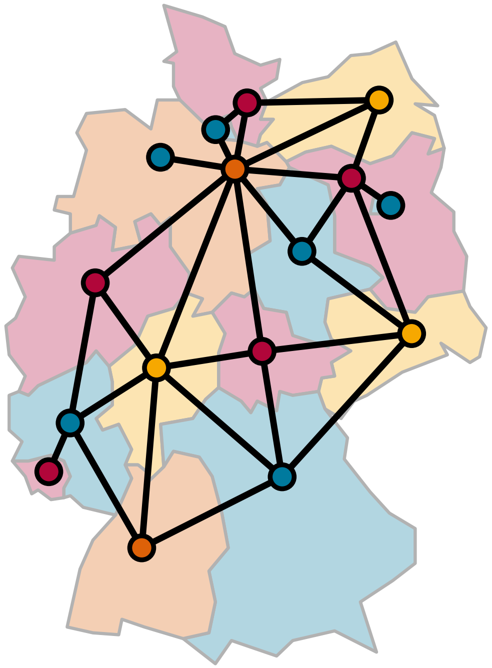
Warum will man Graphen färben?

Landkarte

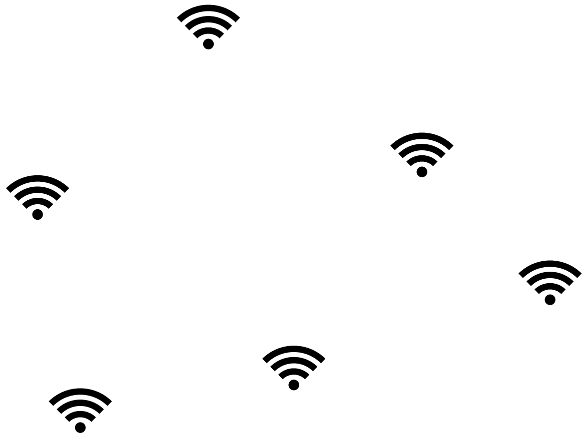


Warum will man Graphen färben?

Landkarte

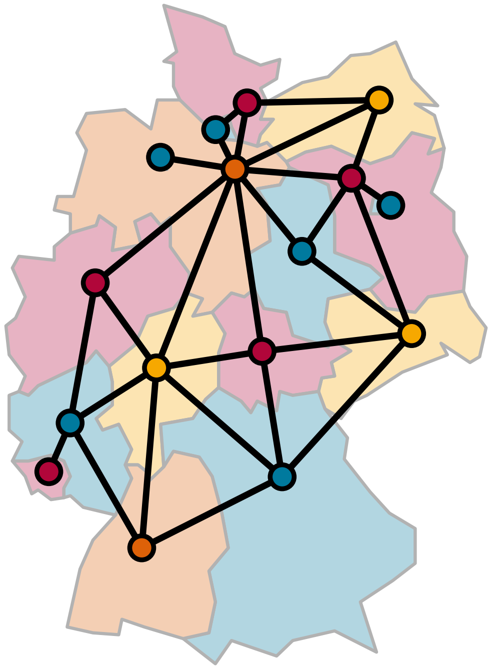


WLAN Sender

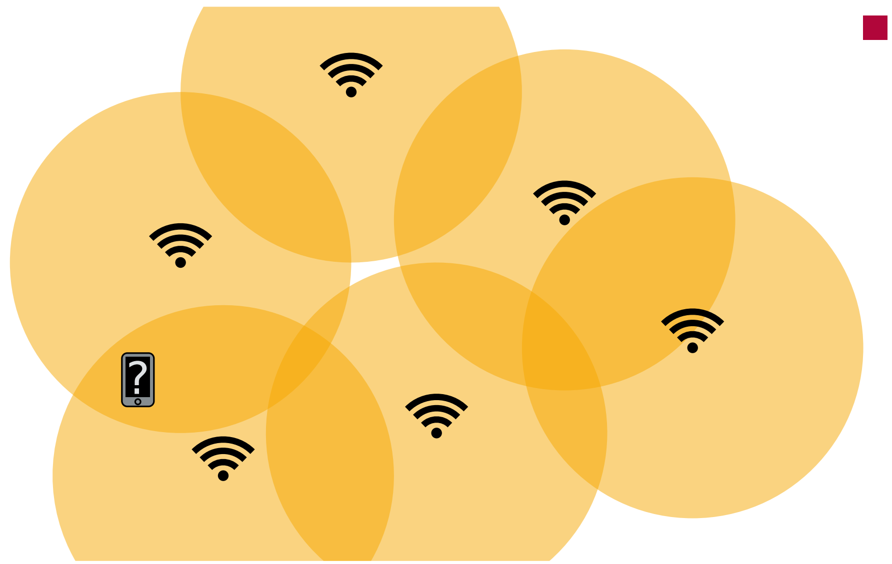


Warum will man Graphen färben?

Landkarte



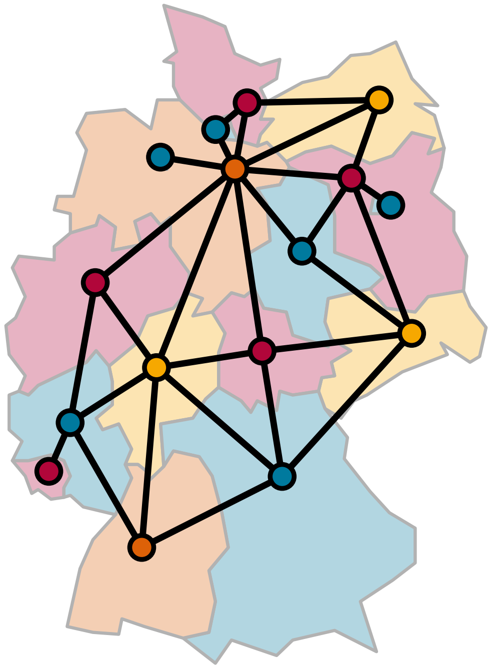
WLAN Sender



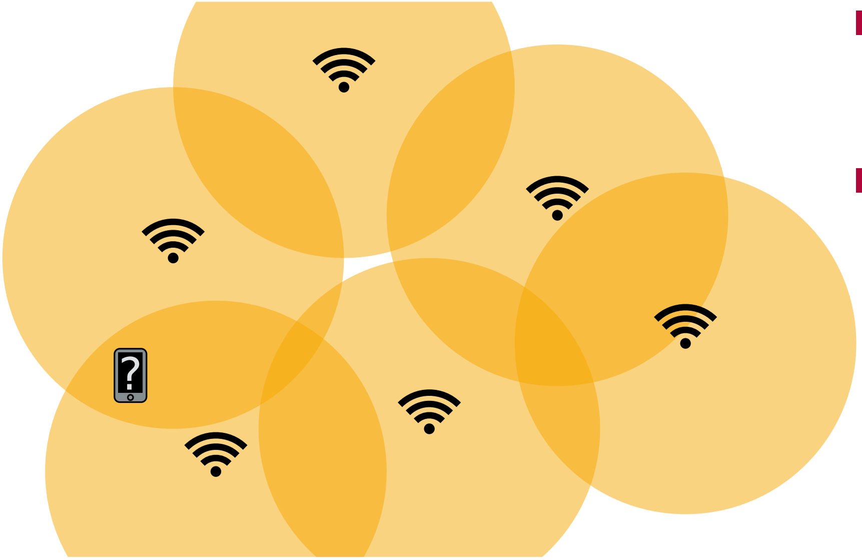
- gegenseitige Störung

Warum will man Graphen färben?

Landkarte



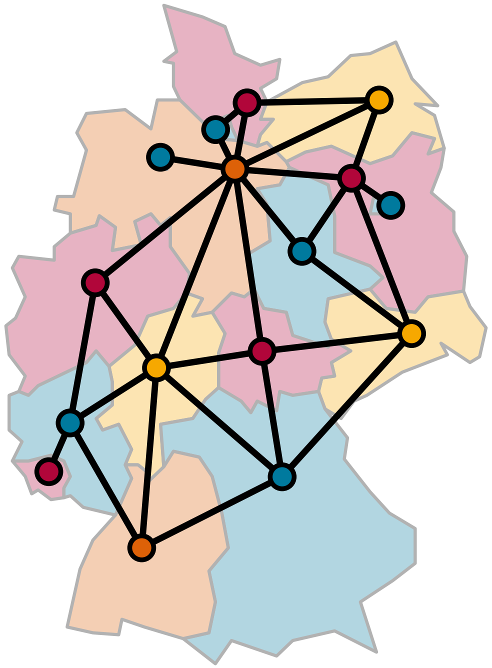
WLAN Sender



- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen

Warum will man Graphen färben?

Landkarte

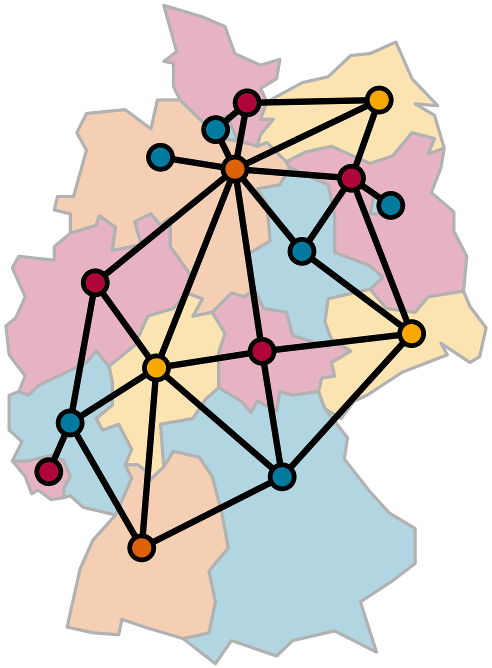


WLAN Sender

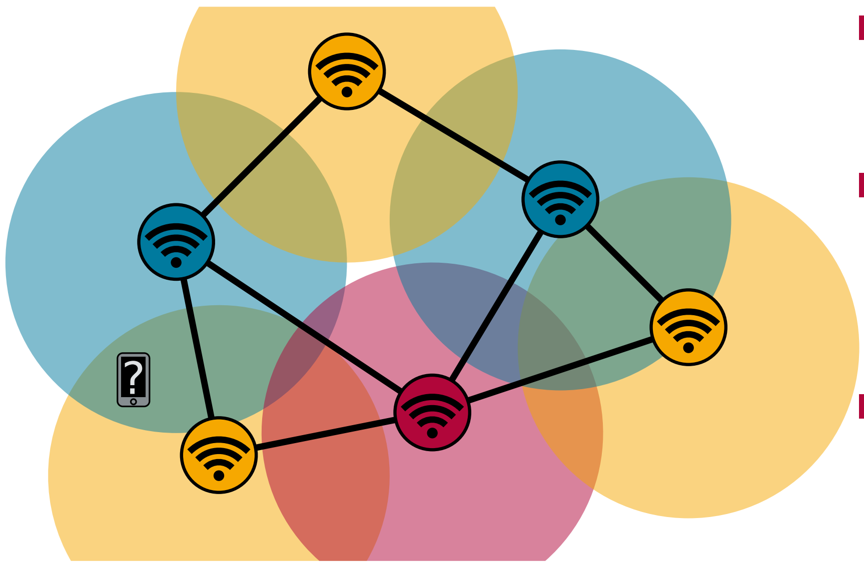
- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen
- Farben ≡ Frequenzen

Warum will man Graphen färben?

Landkarte



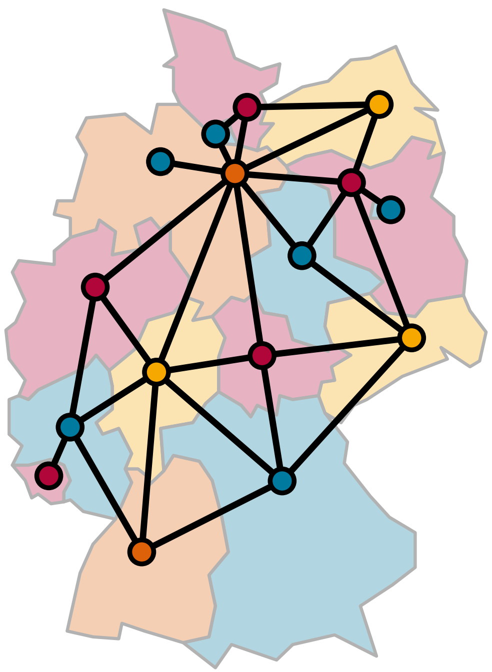
WLAN Sender



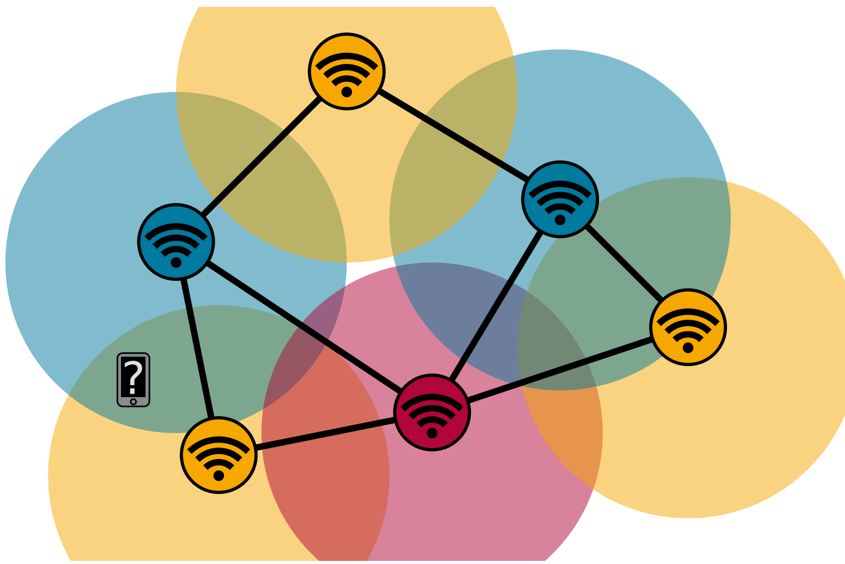
- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen
- Farben ≡ Frequenzen

Warum will man Graphen färben?

Landkarte



WLAN Sender



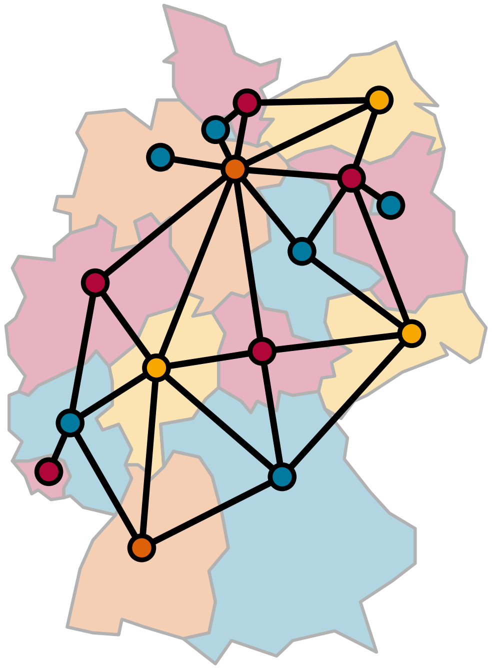
- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen
- Farben $\equiv$ Frequenzen

Sudoku

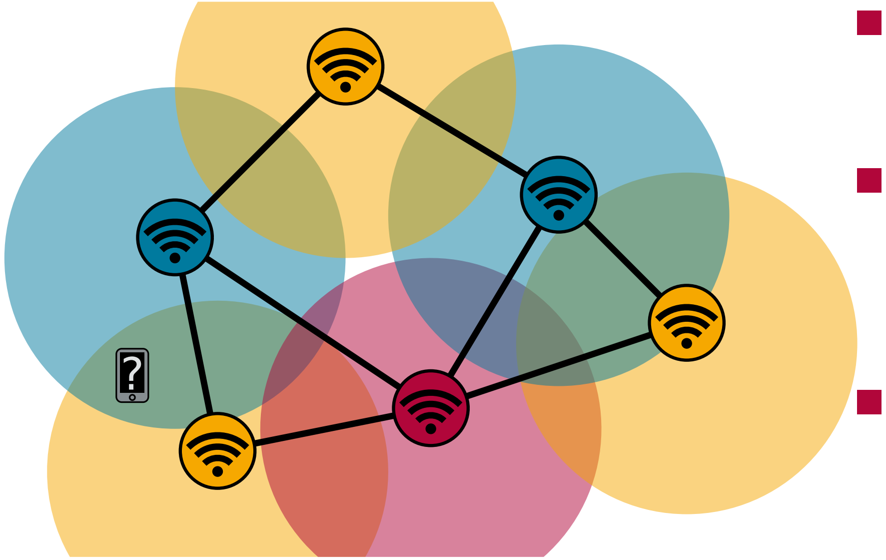
	1						5	
			6	4	1			8
								6
3	6		4		5		9	
	7						3	
8			1		3			4
2				8				
	5						8	7

Warum will man Graphen färben?

Landkarte



WLAN Sender



- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen
- Farben $\equiv$ Frequenzen

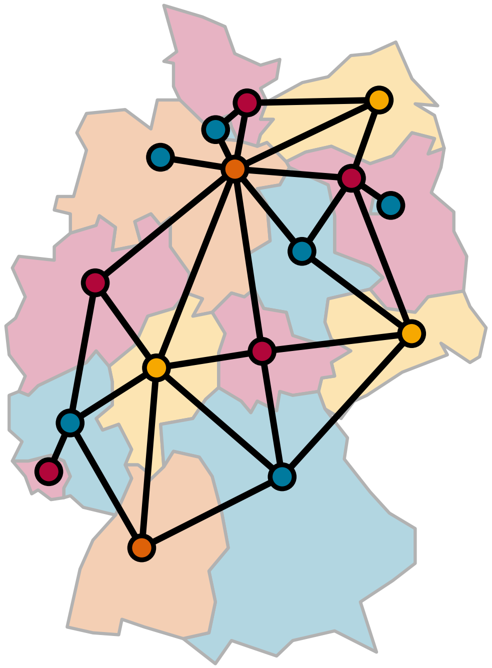
Sudoku

	1						5	
			6	4	1			8
								6
3	6		4		5		9	
	7						3	
8			1		3			4
2				8				
	5						8	7

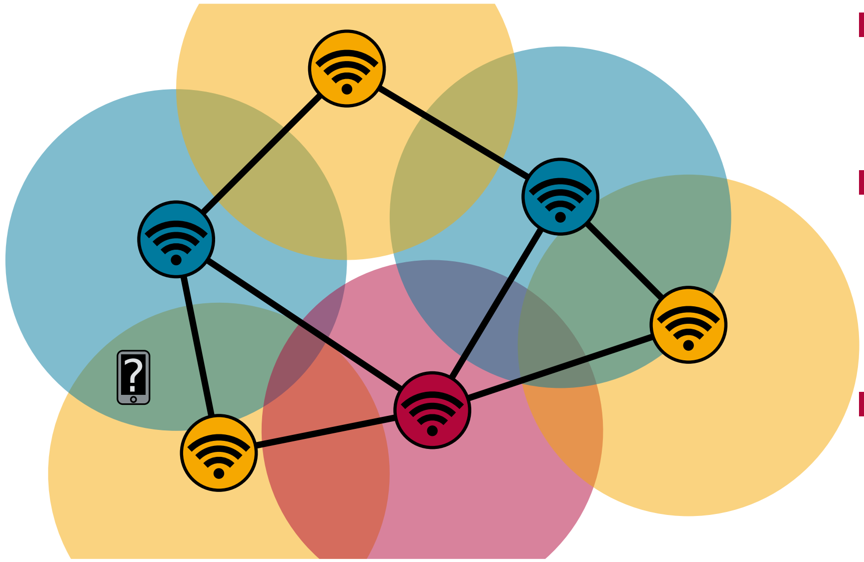
- Zahlen $\equiv$ Farben

Warum will man Graphen färben?

Landkarte



WLAN Sender



- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen
- Farben $\equiv$ Frequenzen

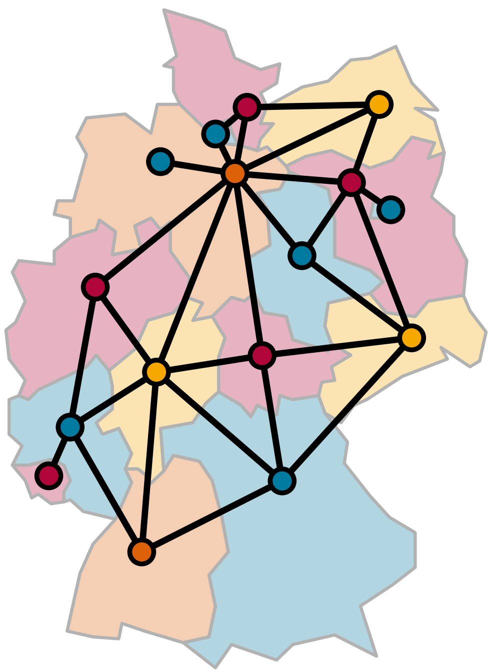
Sudoku

○								
○	1						5	
○			6	4	1			8
○								6
3	6		4		5		9	
	7						3	
8			1		3			4
2				8				
○	5						8	7

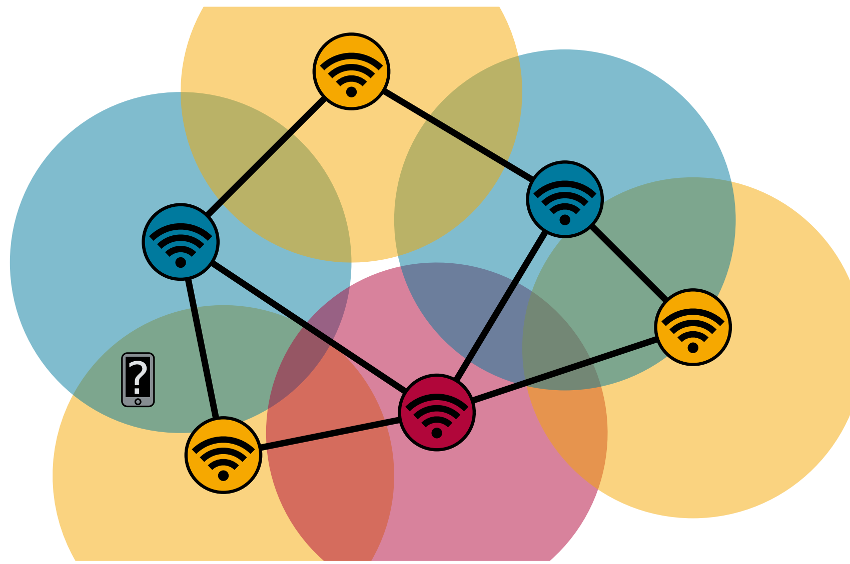
- Zahlen $\equiv$ Farben
- Zelle $\equiv$ Knoten

Warum will man Graphen färben?

Landkarte

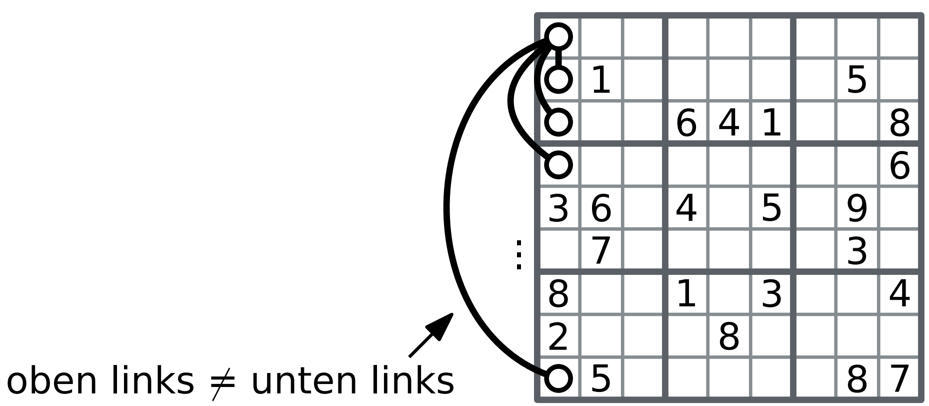


WLAN Sender



- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen
- Farben ≡ Frequenzen

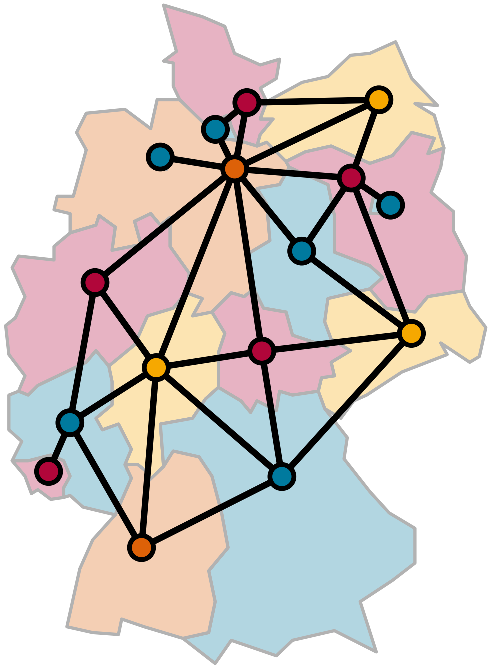
Sudoku



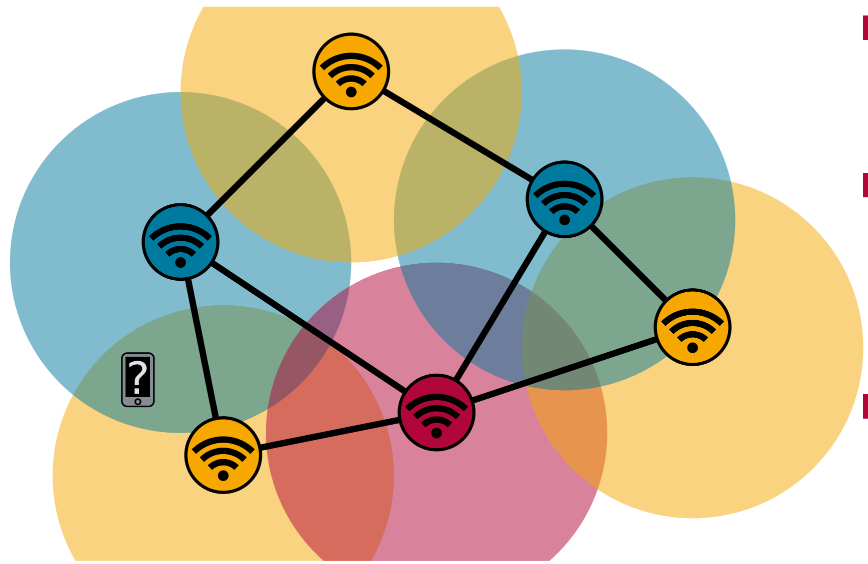
- Zahlen ≡ Farben
- Zelle ≡ Knoten

Warum will man Graphen färben?

Landkarte

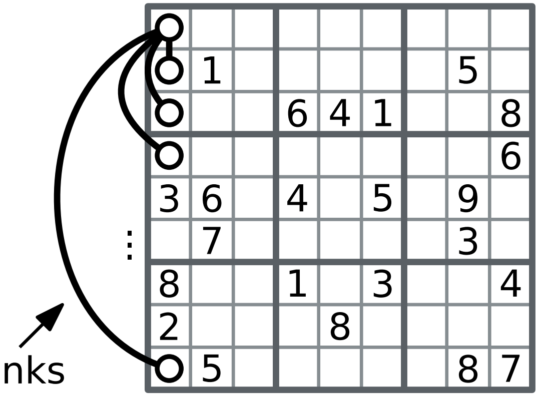


WLAN Sender



- gegenseitige Störung
- verwende unterschiedliche Frequenzen
- Farben $\equiv$ Frequenzen

Sudoku



oben links $\neq$ unten links

- Zahlen $\equiv$ Farben
- Zelle $\equiv$ Knoten
- färbe mit 9 Farben (manche Knoten sind schon gefärbt)

Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen Knoten
Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen
Knoten
Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?

Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen

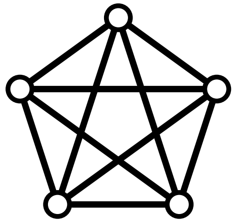
Knoten

Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz

Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?

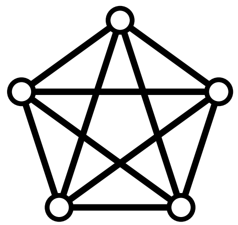


Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen Knoten
Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?



nein, denn:

- 5 Knoten
- jeder braucht eigene Farbe

Vier-Farben-Satz

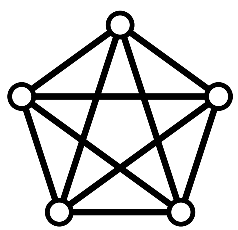
Problem

Färbe ~~eine Landkarte~~ einen Graphen, sodass benachbarte ~~Länder~~ Knoten unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz

Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

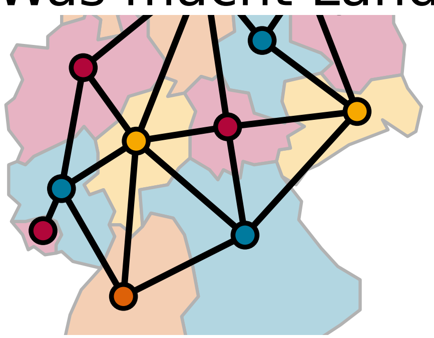
Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?



nein, denn:

- 5 Knoten
- jeder braucht eigene Farbe

Was macht Landkarten zu etwas Besonderem?

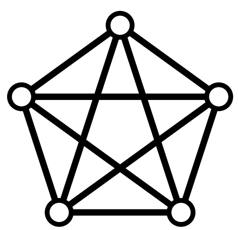


Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen
Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ Knoten unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

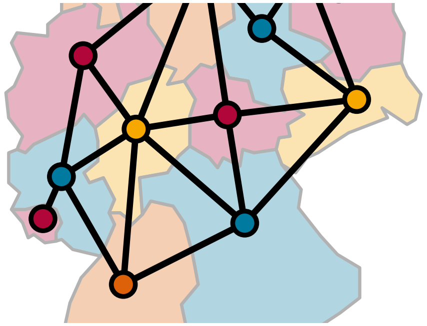
Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?



nein, denn:

- 5 Knoten
- jeder braucht eigene Farbe

Was macht Landkarten zu etwas Besonderem?



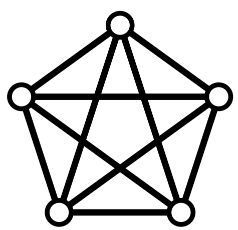
- der Graph kann ohne Kantenkreuzungen gezeichnet werden

Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen
Knoten
Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz
Jede Landkarte kann mit vier Farben gefärbt werden.

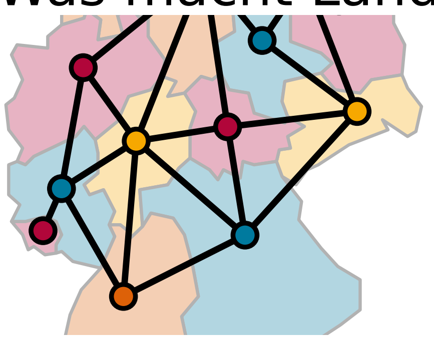
Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?



nein, denn:

- 5 Knoten
- jeder braucht eigene Farbe

Was macht Landkarten zu etwas Besonderem?



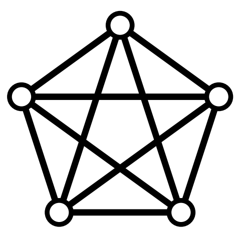
- der Graph kann ohne Kantenkreuzungen gezeichnet werden
- solche Graphen nennt man **planare Graphen**

Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen Knoten
Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz
~~Jede Landkarte~~ kann mit vier Farben gefärbt werden.
Jeder planare Graph

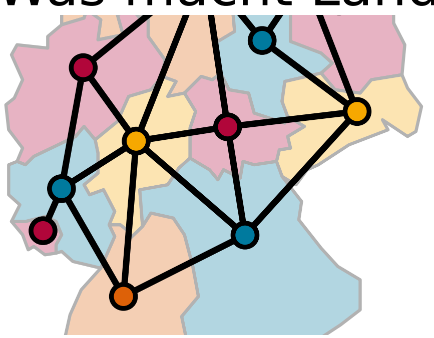
Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?



nein, denn:

- 5 Knoten
- jeder braucht eigene Farbe

Was macht Landkarten zu etwas Besonderem?



- der Graph kann ohne Kantenkreuzungen gezeichnet werden
- solche Graphen nennt man **planare Graphen**

Vier-Farben-Satz

Problem einen Graphen

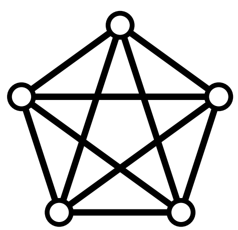
Färbe ~~eine Landkarte~~, sodass benachbarte Knoten ~~Länder~~ unterschiedliche Farben haben.

Vier-Farben-Satz

~~Jede Landkarte~~ kann mit vier Farben gefärbt werden.

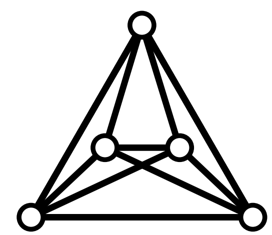
Jeder planare Graph

Kann auch jeder Graph mit vier Farben gefärbt werden?

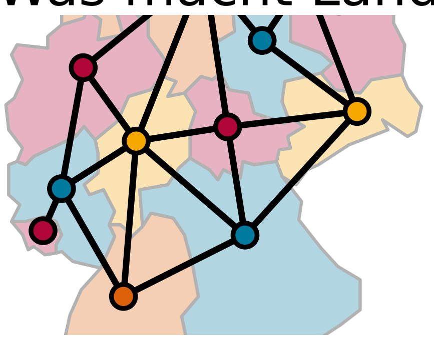


nein, denn:

- 5 Knoten
- jeder braucht eigene Farbe

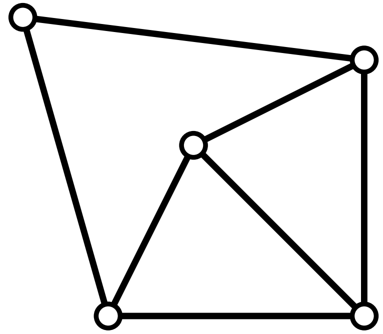


Was macht Landkarten zu etwas Besonderem?



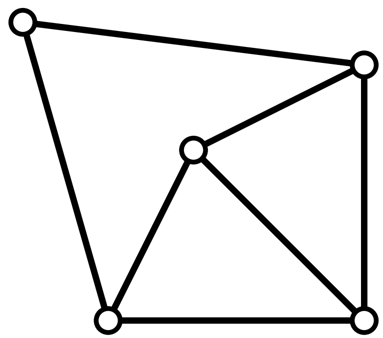
- der Graph kann ohne Kantenkreuzungen gezeichnet werden
- solche Graphen nennt man **planare Graphen**

Knoten, Kanten und Facetten

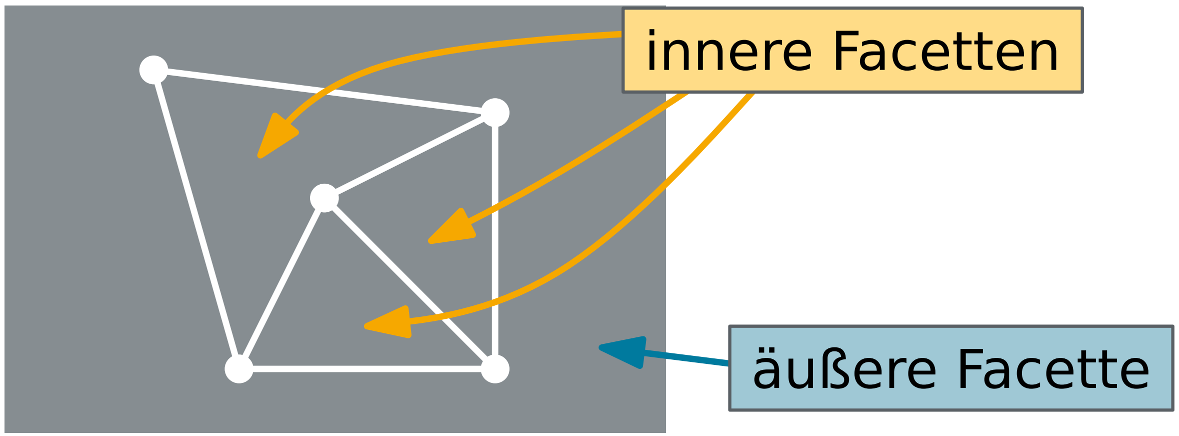


Ein planarer Graph

Knoten, Kanten und Facetten

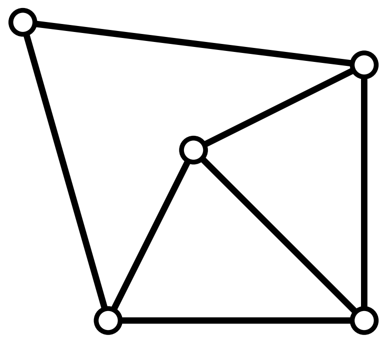


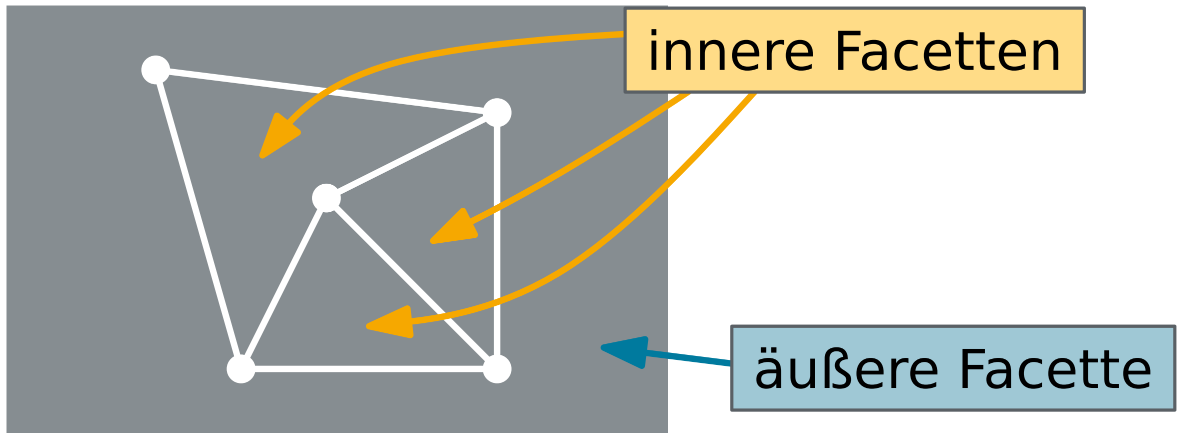
Ein planarer Graph



. . . zerlegt die Ebene in mehrere Facette.

Knoten, Kanten und Facetten



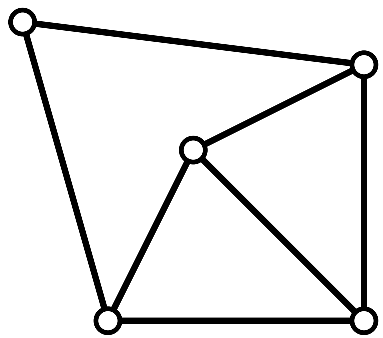


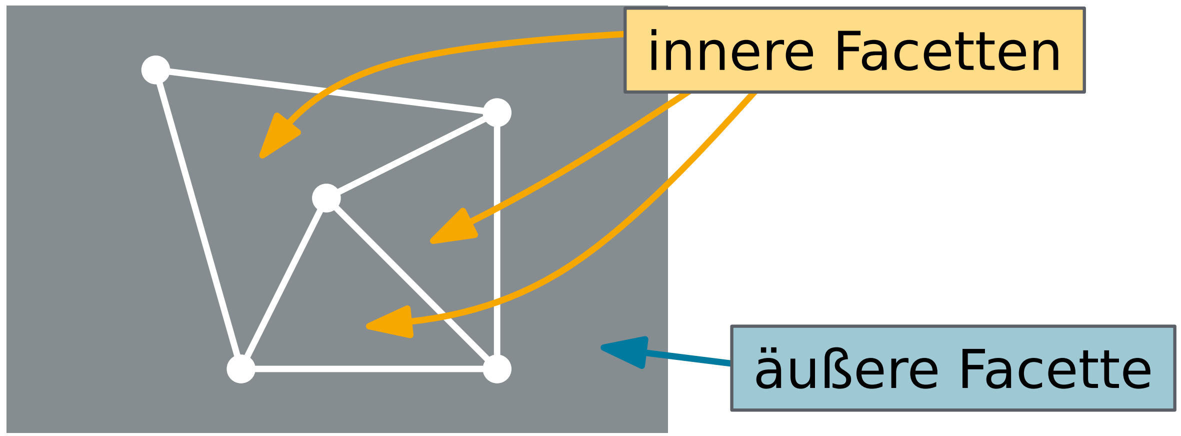
Ein planarer Graph ...zerlegt die Ebene in mehrere Facette.

Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Knoten, Kanten und Facetten



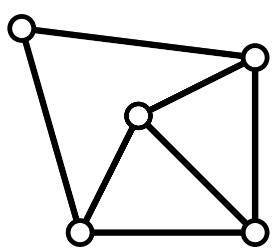


Ein planarer Graph . . . zerlegt die Ebene in mehrere Facette.

Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

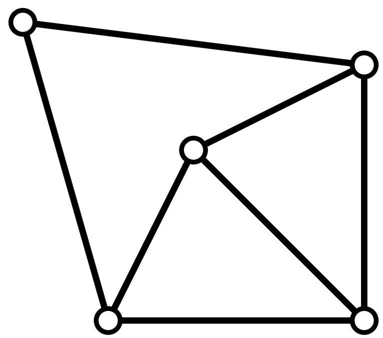
$$n - m + f = 2$$

Beispiel:

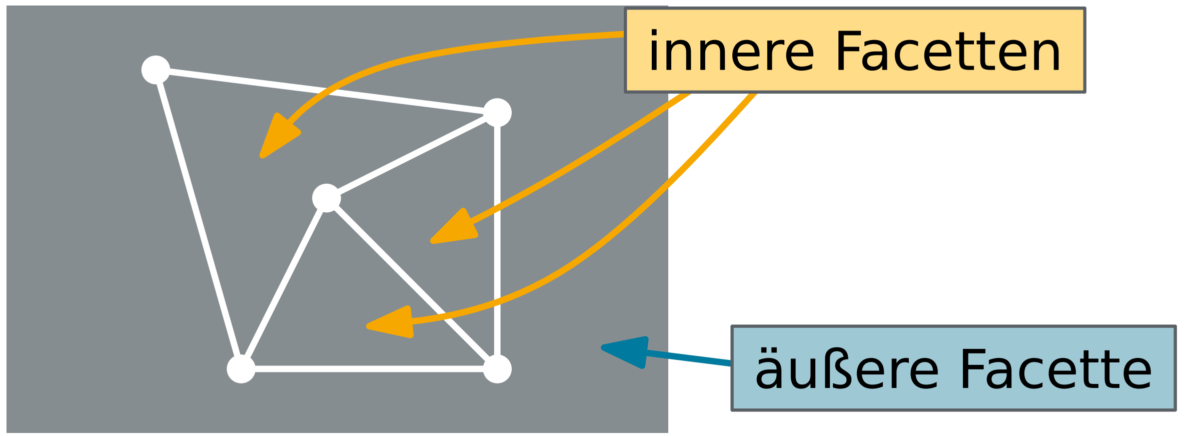


- $n = ?$
- $m = ?$
- $f = ?$

Knoten, Kanten und Facetten



Ein planarer Graph

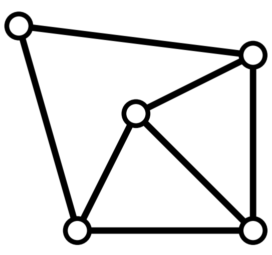


. . . zerlegt die Ebene in mehrere Facette.

Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

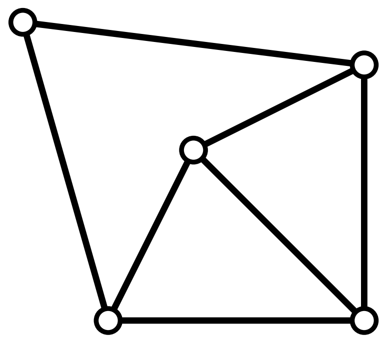
$$n - m + f = 2$$

Beispiel:

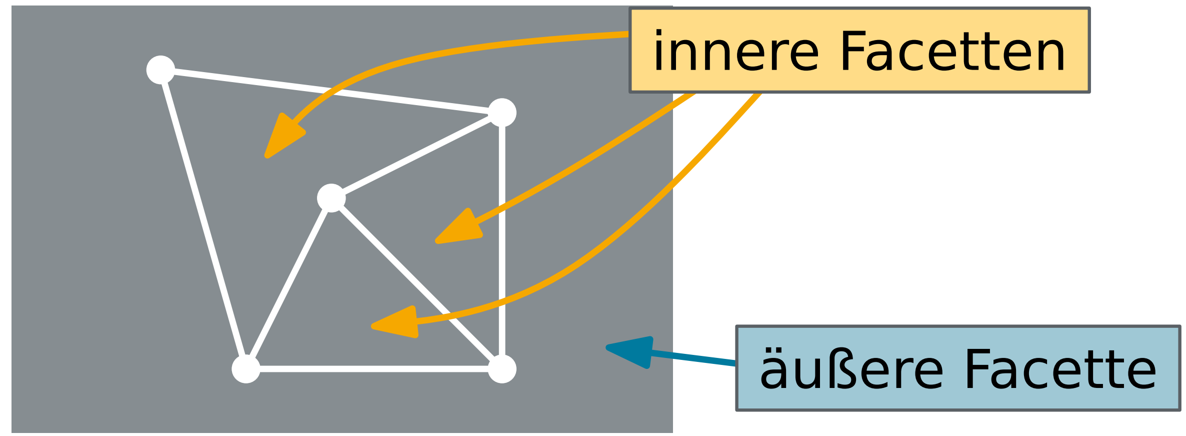


- $n = 5$
- $m = 7$
- $f = 4$

Knoten, Kanten und Facetten



Ein planarer Graph

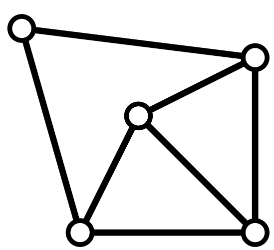


. . . zerlegt die Ebene in mehrere Facette.

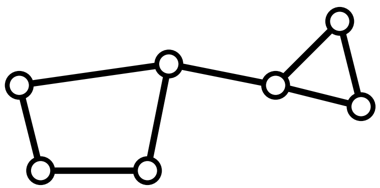
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beispiel:

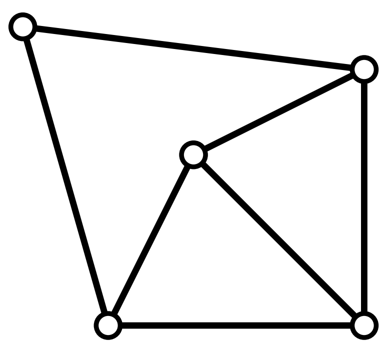


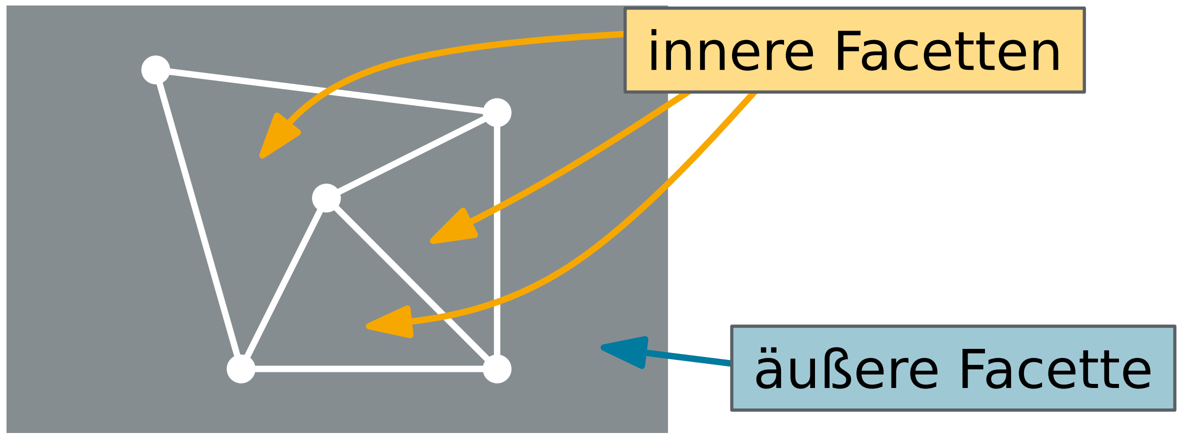
- $n = 5$
- $m = 7$
- $f = 4$



- $n = ?$
- $m = ?$
- $f = ?$

Knoten, Kanten und Facetten



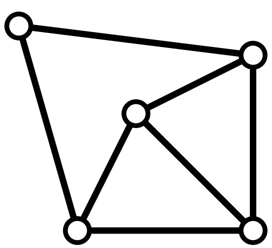


Ein planarer Graph ...zerlegt die Ebene in mehrere Facette.

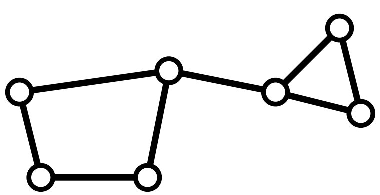
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beispiel:



- $n = 5$
- $m = 7$
- $f = 4$



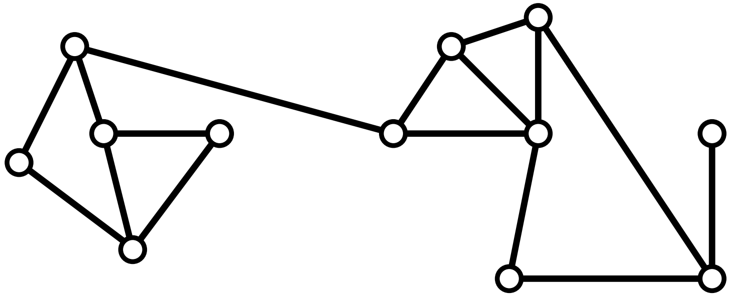
- $n = 7$
- $m = 8$
- $f = 3$

Satz von Euler

Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?



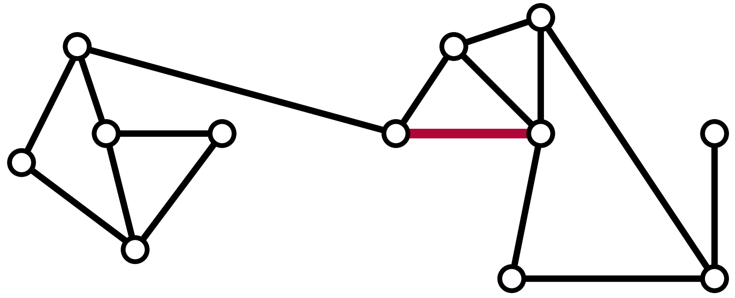
Satz von Euler

Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1



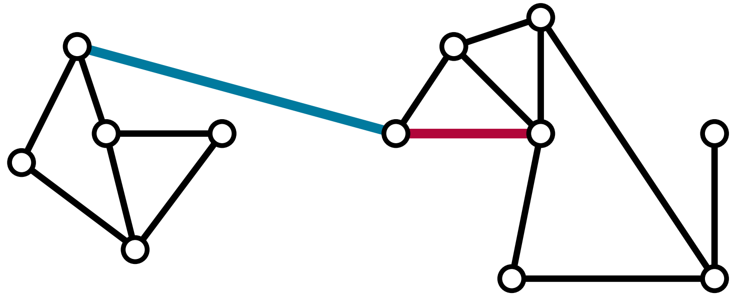
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1

b) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1



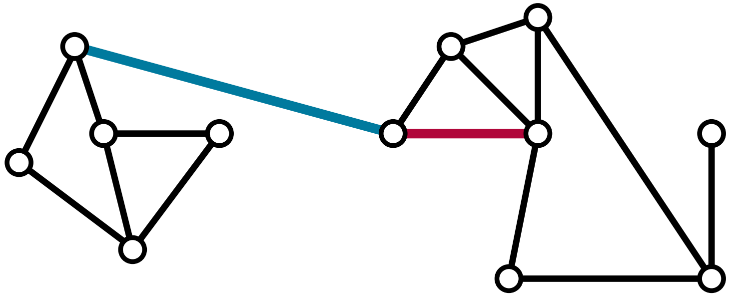
Satz von Euler

> **Satz von Euler**
> Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:
> $$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1

b) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1



Lösche nach und nach alle Kanten:

	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen

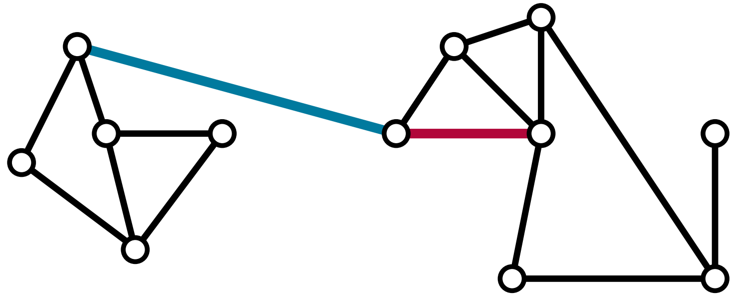
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1

b) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1



Lösche nach und nach alle Kanten:

	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen
#Zusammenhangskomponenten				

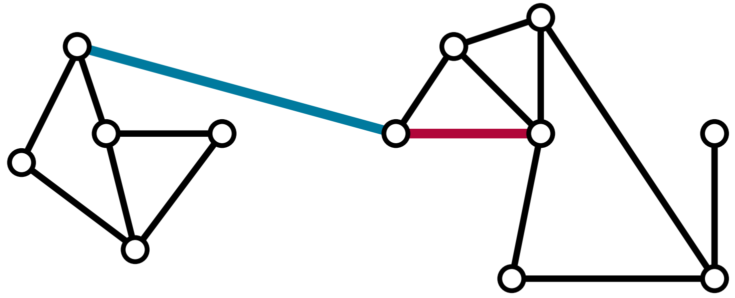
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1

b) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1



Lösche nach und nach alle Kanten:

	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen
#Zusammenhangskomponenten	1	n	$\Rightarrow$	$(n-1)\times$ Typ b)

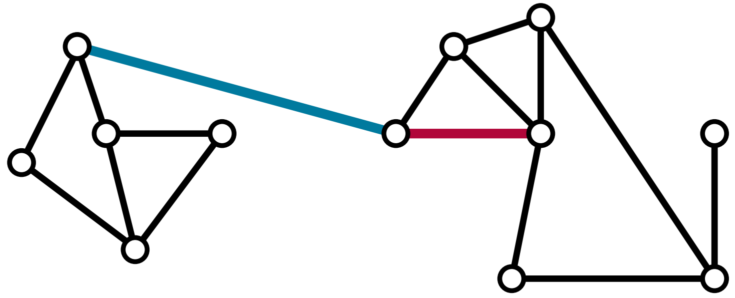
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1

b) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1



Lösche nach und nach alle Kanten:

	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen
#Zusammenhangskomponenten	1	n	$\Rightarrow$	$(n-1)\times$ Typ b)
#Facetten				

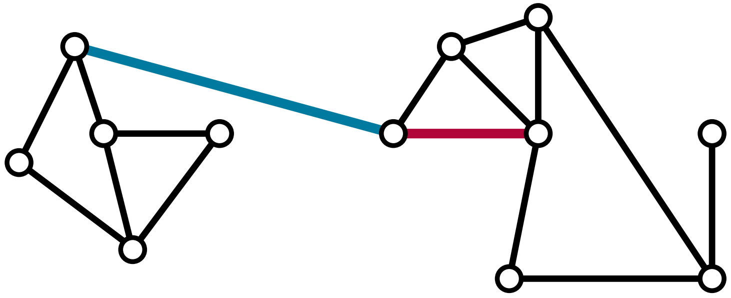
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1

b) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1



Lösche nach und nach alle Kanten:

	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen
#Zusammenhangskomponenten	1	n	$\Rightarrow$	$(n-1)\times$ Typ b)
#Facetten	f	1	$\Rightarrow$	$(f-1)\times$ Typ a)

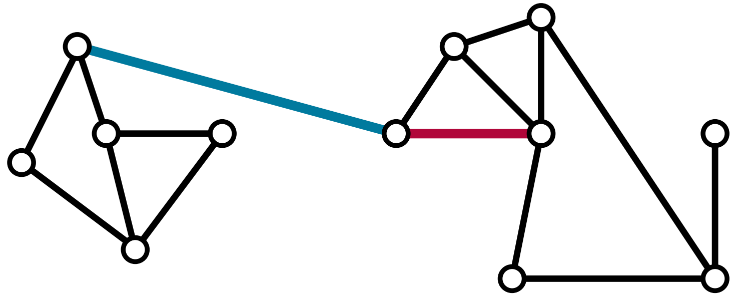
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Beweis:
Was passiert, wenn man eine Kante löscht?

a) verringert Anzahl Facetten um 1

b) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1



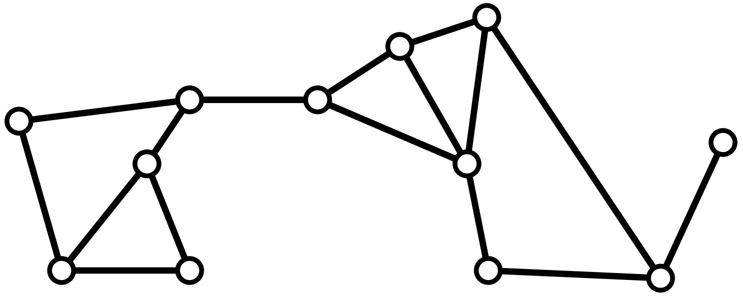
Lösche nach und nach alle Kanten:

	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen
#Zusammenhangskomponenten	1	n	$\Rightarrow$	$(n-1)\times$ Typ b)
#Facetten	f	1	$\Rightarrow$	$(f-1)\times$ Typ a)

$$m = n + f - 2$$

Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

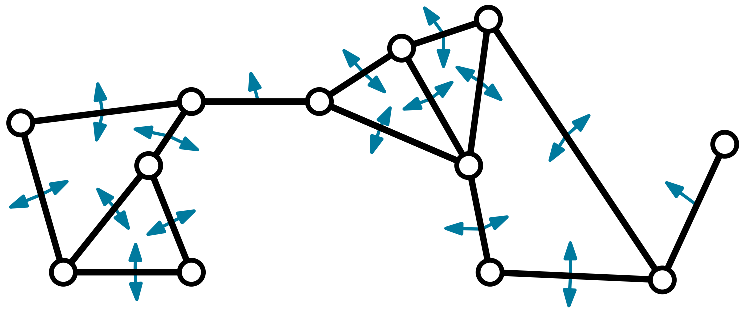


Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis:

- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.



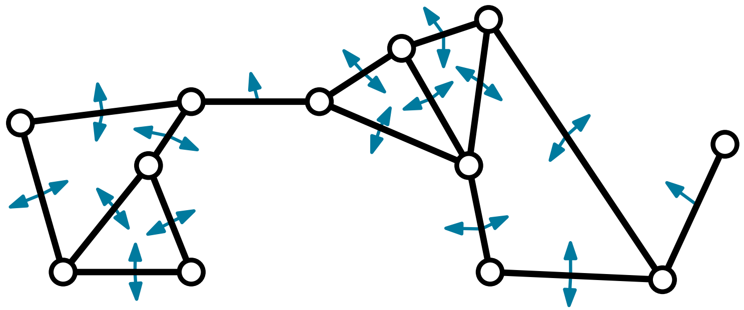
Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis:

- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.
- Für die Anzahl p der Pfeile gilt:

$$\boxed{p} \leq 2m$$



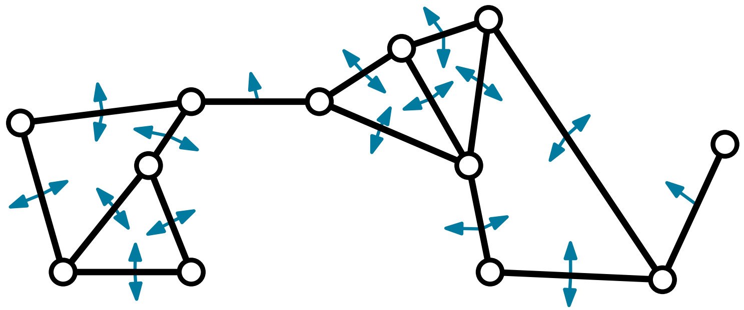
Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis:

- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.
- Für die Anzahl p der Pfeile gilt:

$$3f \leq \boxed{p} \qquad \boxed{p} \leq 2m$$



Nicht zu viele Kanten

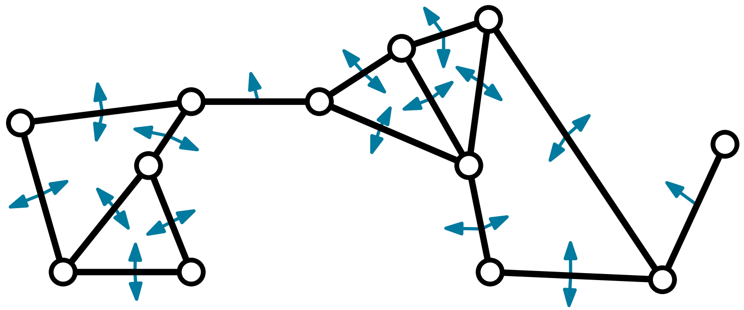
Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis:

- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.
- Für die Anzahl p der Pfeile gilt:

$$3f \leq p \qquad p \leq 2m$$

$$\Rightarrow 3f \leq 2m$$

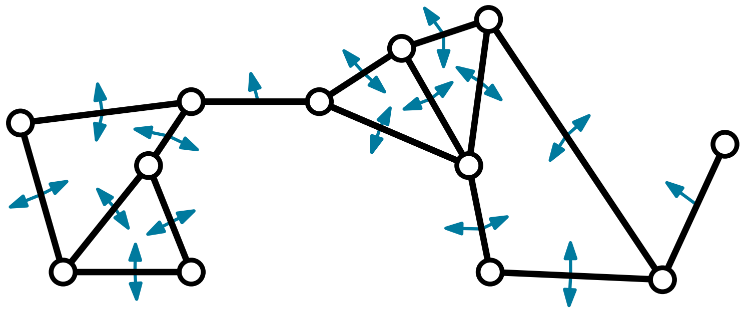


Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis:

- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.
- Für die Anzahl p der Pfeile gilt:



$$3f \leq p \qquad p \leq 2m$$

$$\Rightarrow 3f \leq 2m$$

$$3f \leq 2m$$

Euler

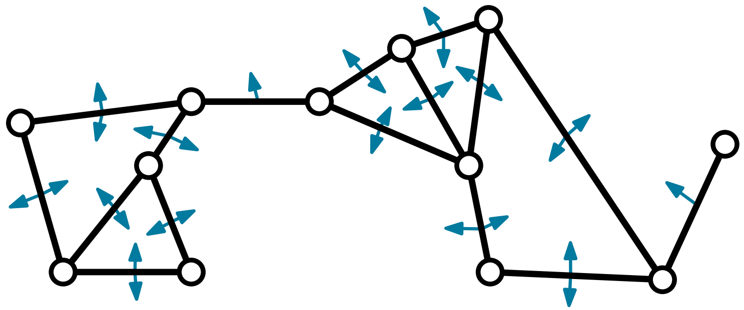
$$n - m + f = 2$$

Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis:

- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.
- Für die Anzahl p der Pfeile gilt:



$$3f \leq p \qquad p \leq 2m$$

$$\Rightarrow 3f \leq 2m$$

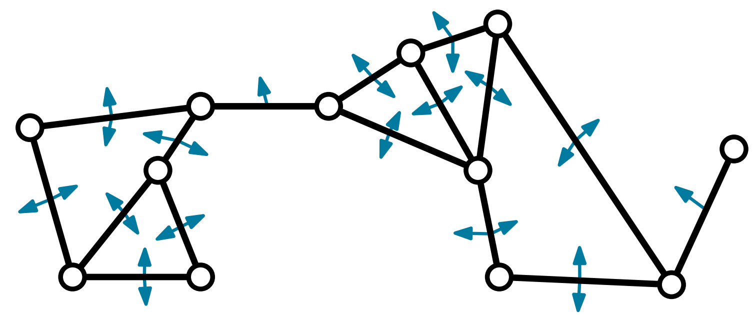
$$\left.\begin{array}{l} 3f \leq 2m \\ n - m + f = 2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} f \leq \frac{2}{3}m \\ m = n + f - 2 \end{array}$$

Euler

Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis:



- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.
- Für die Anzahl p der Pfeile gilt:

$$3f \leq p \qquad p \leq 2m$$

$$\Rightarrow 3f \leq 2m$$

$$3f \leq 2m \quad \Rightarrow \quad f \leq \tfrac{2}{3}m$$

$$n - m + f = 2 \quad \Rightarrow \quad m = n + f - 2$$

$$\Rightarrow \quad m \leq n + \tfrac{2}{3}m - 2$$

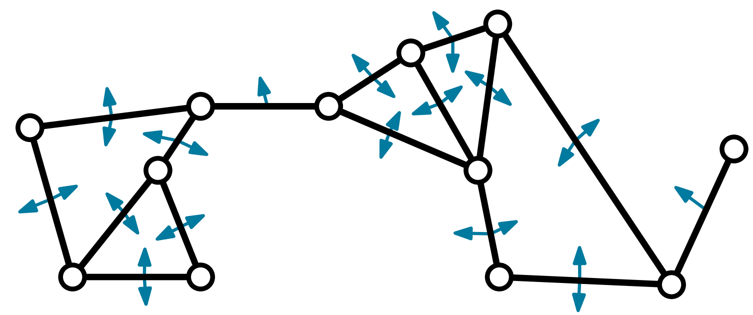
Euler

Nicht zu viele Kanten

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \le 3n - 6$.

Beweis:

- Zeichne einen Pfeil von jeder Kante in jede benachbarte Facette.
- Für die Anzahl p der Pfeile gilt:



$$3f \le p \qquad p \le 2m$$

$$\Rightarrow 3f \le 2m$$

$$\left.\begin{array}{c} 3f \le 2m \\ n - m + f = 2 \end{array}\right\rangle \quad \left.\begin{array}{c} f \le \frac{2}{3}m \\ m = n + f - 2 \end{array}\right\rangle \quad m \le n + \frac{2}{3}m - 2$$

Euler

$$\Rightarrow \frac{1}{3}m \le n - 2 \Rightarrow m \le 3n - 6$$

Ein Knoten mit wenigen Nachbarn

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Folgerung
Jeder planare Graph hat einen Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn.

Beweis:

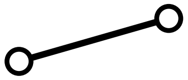
Ein Knoten mit wenigen Nachbarn

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Folgerung
Jeder planare Graph hat einen Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn.

Beweis:

- jede Kante sorgt für 2 Nachbarschaften



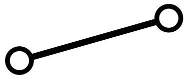
Ein Knoten mit wenigen Nachbarn

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Folgerung
Jeder planare Graph hat einen Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn.

Beweis:

- jede Kante sorgt für 2 Nachbarschaften



- die durchschnittliche Anzahl an Nachbarn ist maximal $\frac{2 \cdot (3n - 6)}{n}$

$$\frac{2 \cdot (3n-6)}{n} = 6 - \frac{12}{n} < 6$$

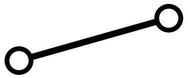
Ein Knoten mit wenigen Nachbarn

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Folgerung
Jeder planare Graph hat einen Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn.

Beweis:

- jede Kante sorgt für 2 Nachbarschaften



- die durchschnittliche Anzahl an Nachbarn ist maximal $\frac{2 \cdot (3n - 6)}{n}$

$$\frac{2 \cdot (3n - 6)}{n} = 6 - \frac{12}{n} < 6$$

- es kann nicht jeder mehr Nachbarn haben als der Durchschnitt

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

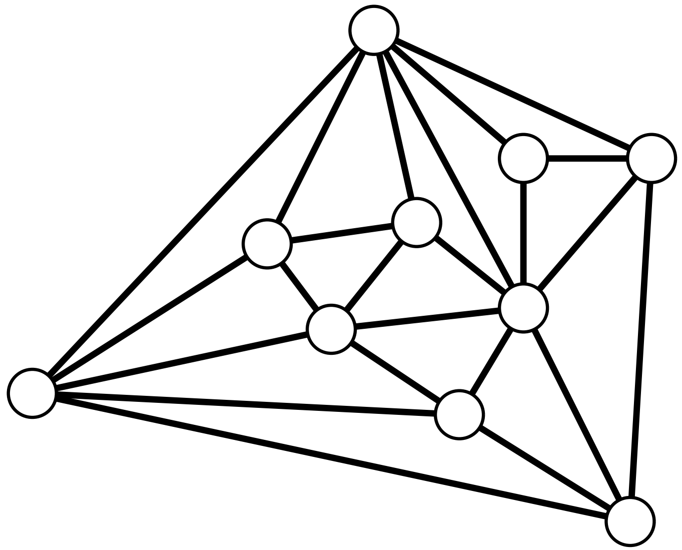
- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



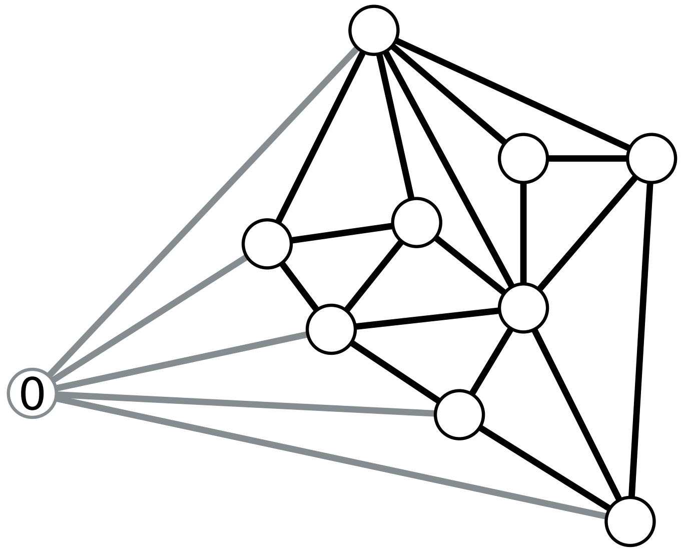
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



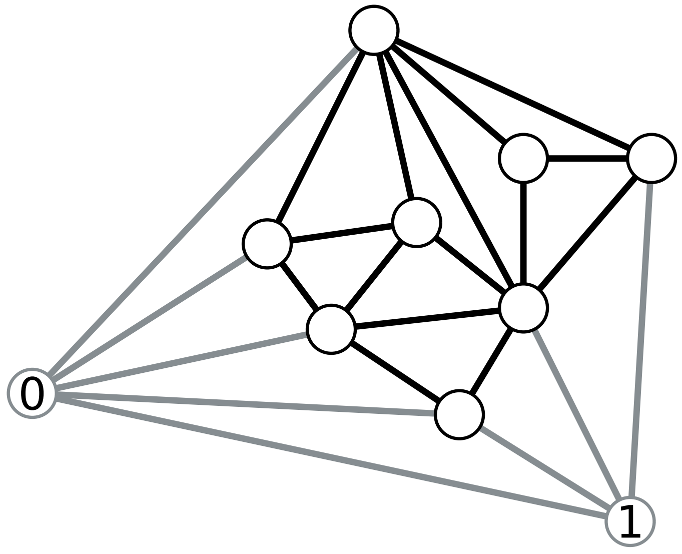
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



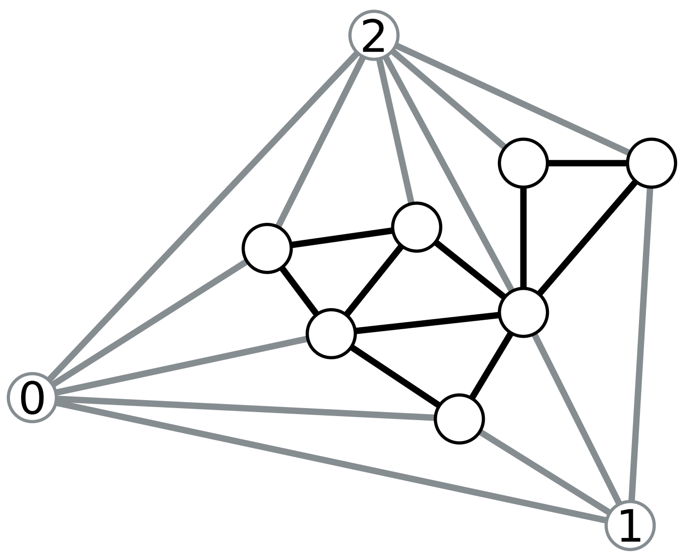
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



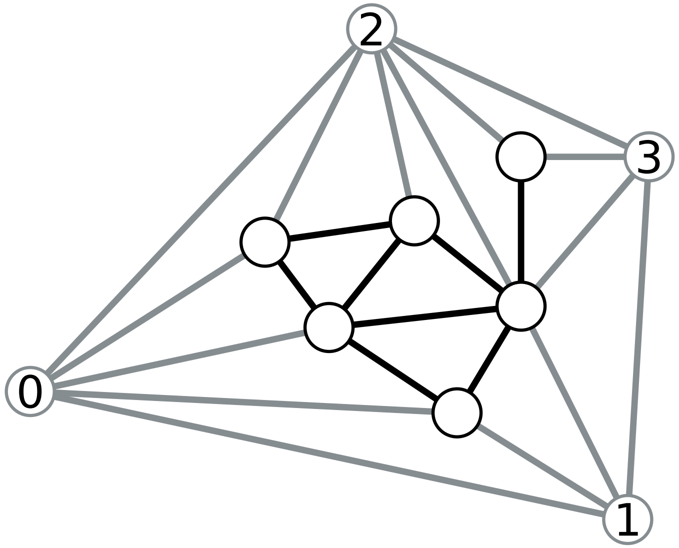
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



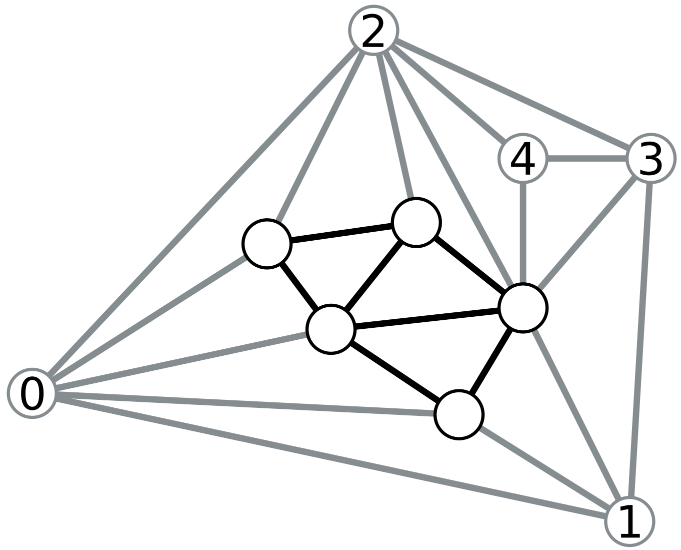
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



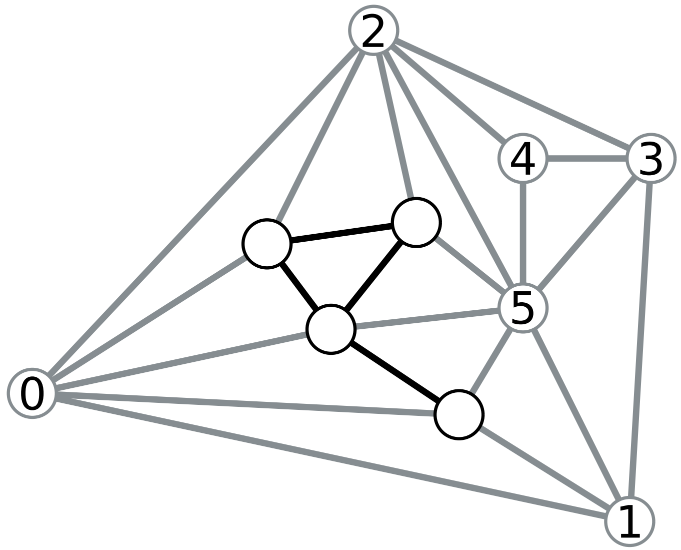
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn

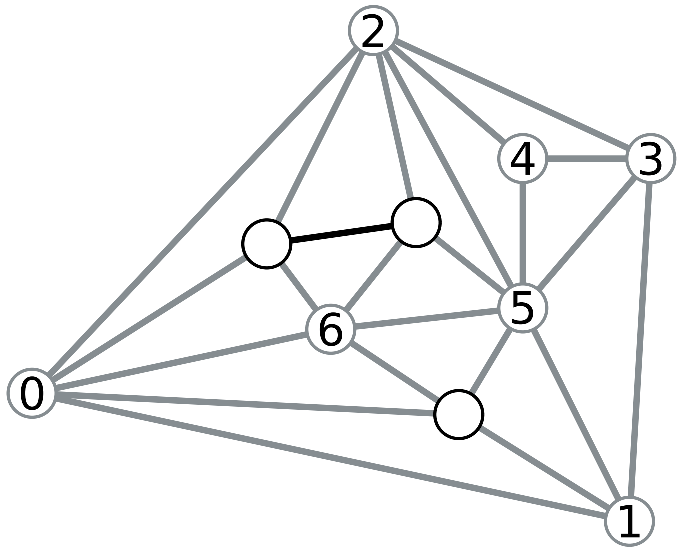
Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



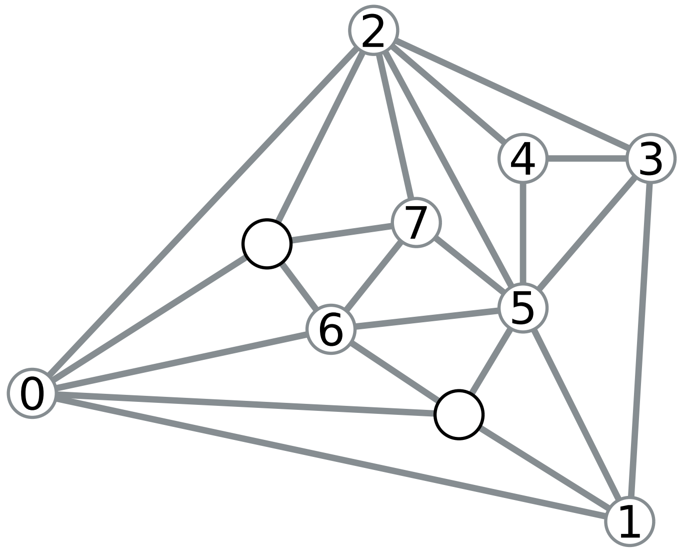
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



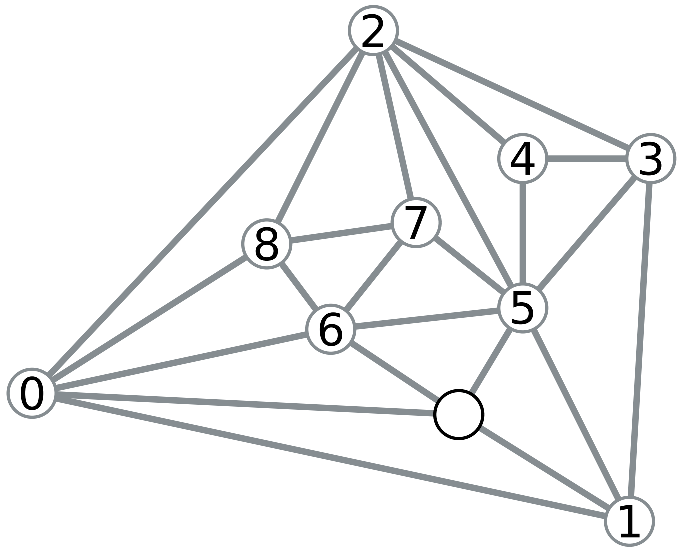
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



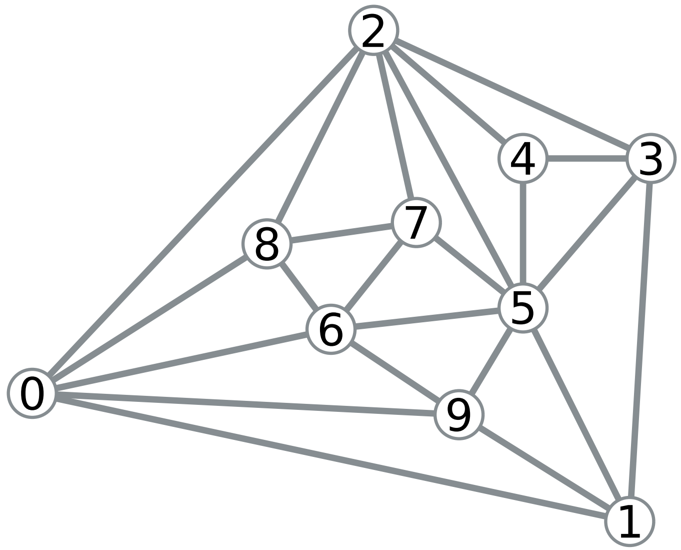
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



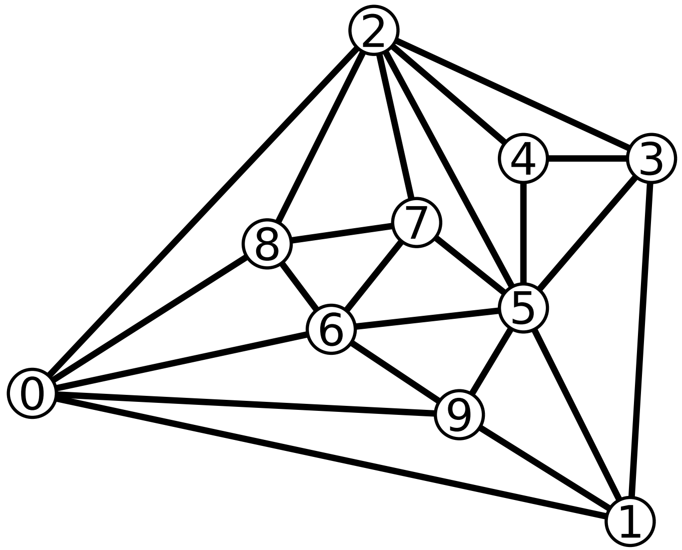
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



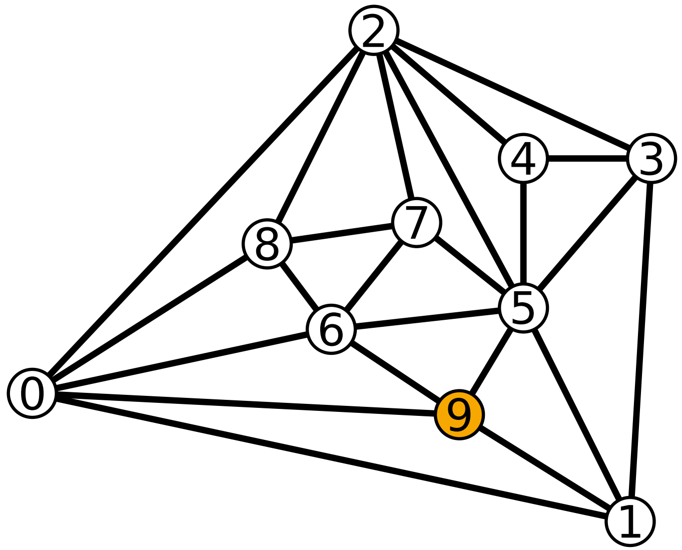
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

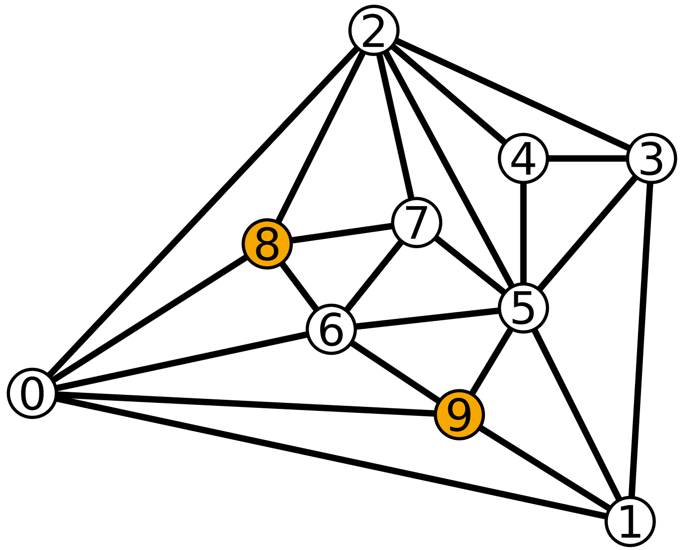
Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



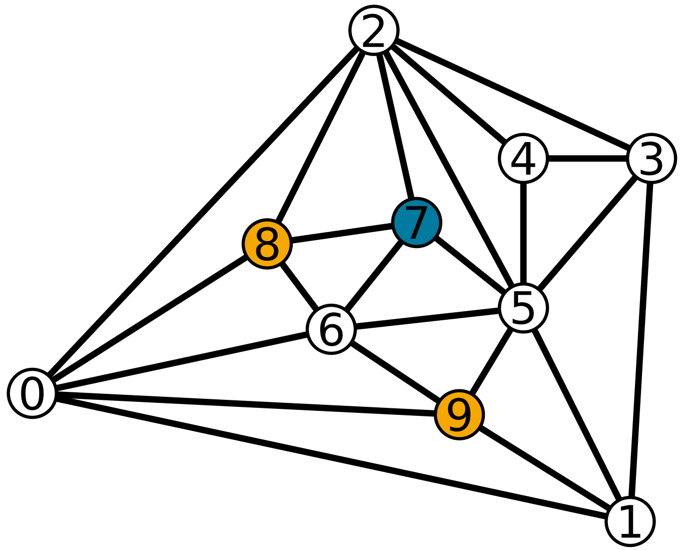
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



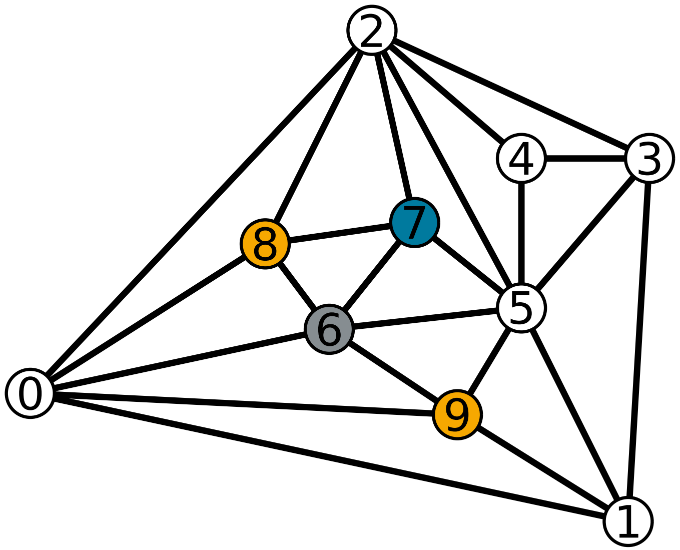
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

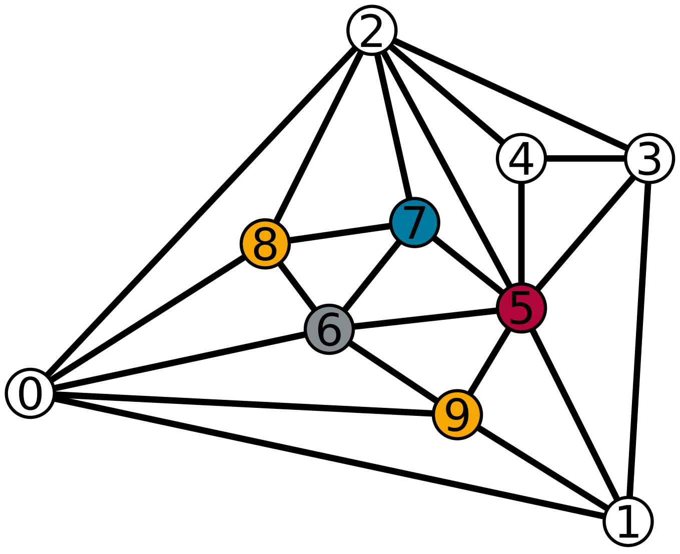
Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



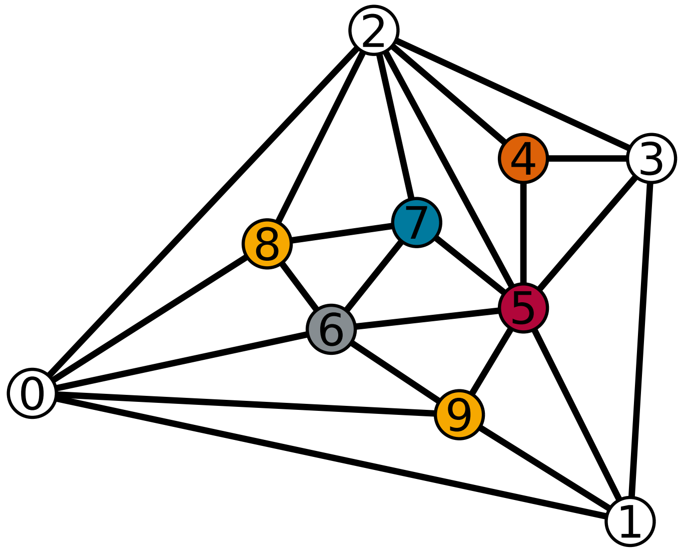
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



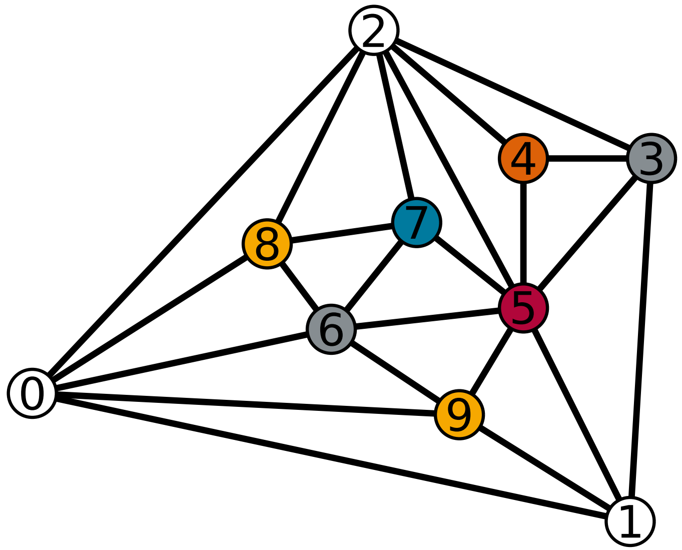
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

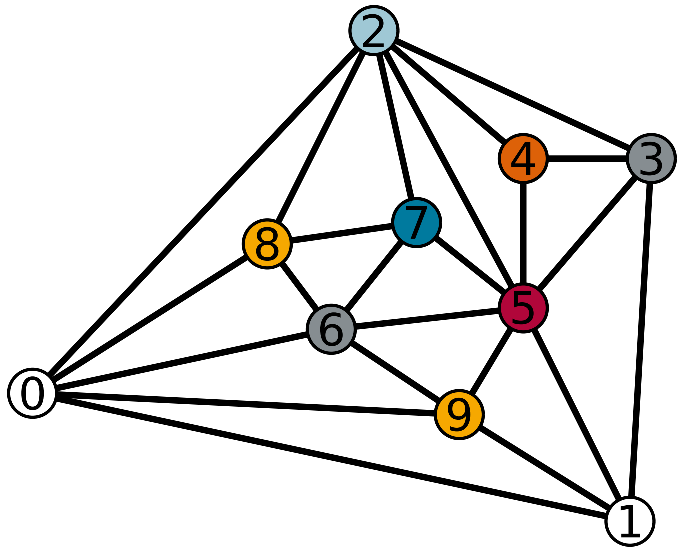
Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



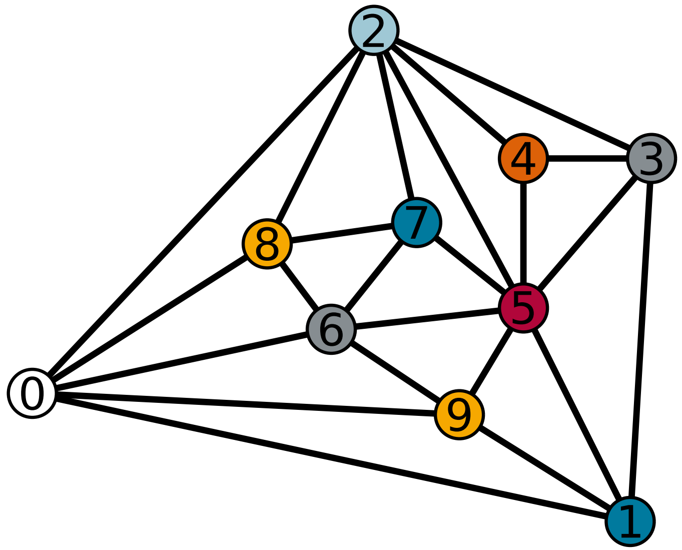
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



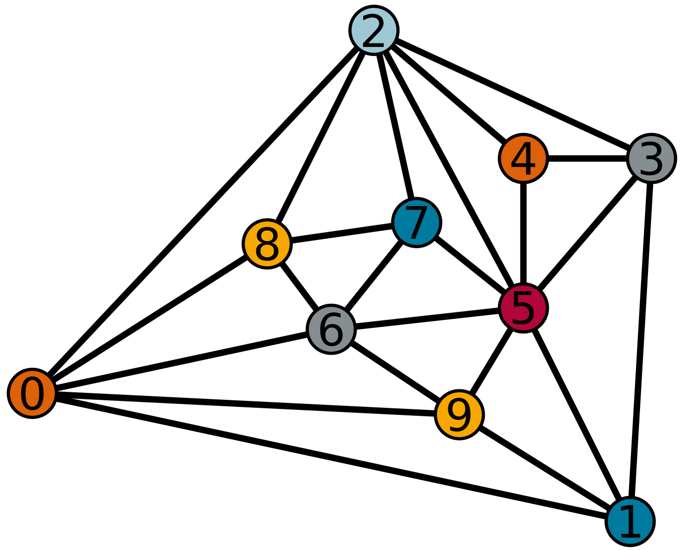
- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



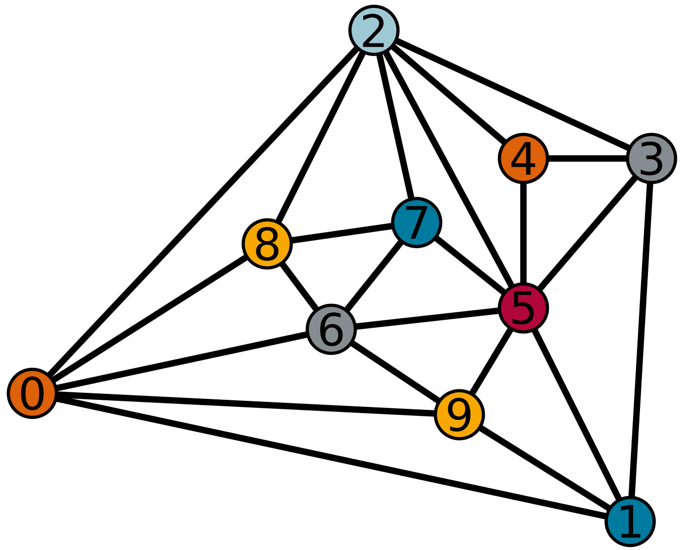
- lösche Knoten mit ≤ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Idee:

- lösche iterativ Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn
- färbe Knoten im umgekehrter Reihenfolge
  $\rightarrow$ wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn

Beispiel:



- lösche Knoten mit $\leq$ 5 Nachbarn
- färbe Knoten

man erhält sogar einen Algorithmus

Zusammenfassung & Ausblick

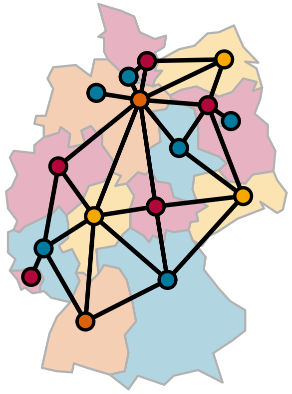
Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Folgerung
Jeder planare Graph hat einen Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn.

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.



Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:
$$n - m + f = 2$$

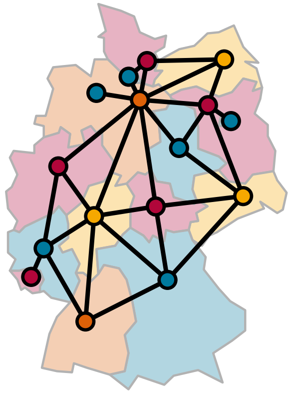
Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Folgerung
Jeder planare Graph hat einen Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn.

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Lösbare Knobelaufgabe:

- Beweise, dass es auch mit 5 Farben geht!



Zusammenfassung & Ausblick

Satz von Euler
Für einen planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und f Facetten gilt:

$$n - m + f = 2$$

Lemma
Für einen planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$.

Folgerung
Jeder planare Graph hat einen Knoten mit 5 oder weniger Nachbarn.

Vier-Farben-Satz (für sechs Farben)
Jeder planare Graph kann mit sechs Farben gefärbt werden.

Lösbare Knobelaufgabe:

- Beweise, dass es auch mit 5 Farben geht!

Knobelaufgabe zum „berühmt werden“:

- Beweise (für einen Menschen nachvollziehbar), dass es mit 4 Farben geht!