Stochastik WS 19/20

Aufgabenblatt 10

Abgabe bis 29.1., 11 Uhr

Exercise 1 (3 Punkte)**.** Beweise oder widerlege die folgenden Aussage:
Seien $X, Y \in \mathcal{L}^1$ reellwertige Zufallsvariablen, dann gilt:

$$\mathbb{E}[|X - Y|] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = Y) = 1$$

Exercise 2 ($2 + 2(+3)$ Punkte)**.** Betrachte die Beta-Verteilung mit Parametern $a, b > 0$.

a) Berechne den Erwartungswert der Betaverteilung. *Hinweis: Es dürfen die Eigenschaften der Beta-Funktion aus Abschnitt 2.5.3 verwendet werden.*

b) Berechne die Varianz der Betaverteilung.

Bonus: Der "Mode" oder "Modalwert" einer (stetigen) Verteilung ist der Punkt, für den die zugehörige Dichtefunktion am größten ist. Nicht jede Verteilung hat einen Mode, und er muss auch nicht immer eindeutig sein.

Bestimme alle Werte a, b für die die Betaverteilung einen Mode hat und gib eine Formel für diesen Mode an.

Exercise 3 (3 Punkte)**.** Gegeben seien reelle, nicht-negative Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Hinweis: Verwende die Eigenschaft der "monotonen Konvergenz" für Erwartungswerte aus der Vorlesung. Du darfst ohne Beweis annehmne, dass $\inf_{m\geq k} X_m$ *für jedes* $k \geq 0$ *wieder eine Zufallsvariable (d.h. messbar) ist.*