# Stochastik WS 19/20

## Aufgabenblatt 2

### Abgabe bis 13.11., 11 Uhr

**Exercise 1** (3 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}(A\Delta B) \geq |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)|,$$

wobei wir die *symmetrische Differenz* zweier Mengen als

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

definieren.

**Exercise 2** (3 Punkte)**.** Seien $\Omega = [0, 1]$. Wir betrachten zwei $\sigma$-Algebren:

1. $\mathcal{B}_\Omega = \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{B}\}$, wobei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borelsche $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}$ ist (siehe auch A1.b auf Blatt 1, eine solche $\sigma$-Algebra wird auch *Spur-$\sigma$-Algebra* genannt); und
2. $\sigma(\mathcal{E})$, erzeugt durch $\mathcal{E} := \{[0, a) : a \in [0, 1]\}$.

Gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_\Omega$? Falls ja, warum, falls nein, wie sieht die Beziehung zwischen den beiden $\sigma$-Algebren aus?

**Exercise 3** (4 Punkte)**.** Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 6\}\}$ ein Erzeuger von $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$.

- Wie sieht $\mathcal{F}$ aus, und wie viele Elemente hat $\mathcal{F}$?
- Existiert ein kleinerer Erzeuger von $\mathcal{F}$ (d.h. ein Erzeuger mit weniger als 3 Elementen)? Falls ja: Gib einen solchen Erzeuger an; falls nein: gibt es einen äquivalenten Erzeuger mit gleich vielen Elementen wie $\mathcal{E}$?

**Exercise 4** (3 Punkte)**.** Sei die Funktion $f_{r,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{r,n}(x) := x^{-n} 1_{[r,\infty[}(x) \tag{1}$$

wobei $n \in \{2, 3, \ldots\}$ und $r \in [1, \infty[$ ($1_A$ ist die Indikatorfunktion definiert wie in (1.16) im Buch).

Finde einen *Normierungsfaktor* $c_{r,n} > 0$, so dass $\int_{\mathbb{R}} c_{r,n} f_{r,n}(x) dx = 1$.