Stochastik WS 19/20

Aufgabenblatt 7

Abgabe bis 18.12., 11 Uhr

Exercise 1 (2 + 2 + 3 Punkte)**.** Sei $\Omega = \mathbb{Z}_+^2$ und die Zähldichte $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $p(i,j) := \frac{\lambda^i \mu^j}{i!j!} \exp(-(\lambda + \mu))$ für beliebige $\lambda, \mu > 0$ (zwei-dimensionale Poissonverteilung).

a) Zeige, dass p auf Ω tatsächlich eine Zähldichte ist. Was ist die σ-Algebra?

b) Wenn X auf Ω mit Zähldichte p verteilt ist, bestimme die Verteilung von X_k, der Projektion auf die k-te Koordinate.

c) Bestimme die Verteilung von $X_1 + X_2$ (es darf das Multinomialtheorem angewendet werden: `https://de.wikipedia.org/wiki/Multinomialtheorem`).

Exercise 2 (3 + 2 Punkte)**.** Betrachte das Ziegenproblem: Ein Teilnehmer einer Spielshow steht vor drei Türen. Hinter einer dieser Tür steht ein Gewinn, hinter den anderen beiden eine Ziege. Der Spieler weiß nicht, was hinter welcher Tür steht, aber muss sich für eine entscheiden. Nachdem der Spieler sich für eine Tür entschieden hat, öffnet der Spielleiter, der weiß hinter welcher Tür der Gewinn steht, eine der beiden verbliebenen Türen und bietet dem Spieler an, zur letzten verbliebenen Tür zu wechseln. Man kann davon ausgehen, dass der Spielleiter immer eine Tür ohne Ziege öffnet (um es spannender zu machen).

a) Erhöht der Spieler seine Chance zu gewinnen, wenn er jetzt wechselt? Modelliere dieses Problem mit bedingten Wahrscheinlichkeiten.

b) Implementiere dieses Problem und simuliere das Szenario für $n = 1000$. Abgabe per Mail, idealerweise in Python, Code sollte mit Standarddependencies (z.B. numpy, scipy, matplotlib) via `python name_of_script.py` aufrufbar sein.

Exercise 3 (2 Punkte)**.** Es sei der W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben und $A, B \in \mathcal{F}$ mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Beweise oder widerlege:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$