Stochastik WS 19/20
Probeklausur

Exercise 1. Sei $\Omega = \mathbb{R}$; zeige, dass

$$\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} : |A| < \infty \text{ oder } |A^c| < \infty\}$$

keine σ-Algebra ist, aber alle bis auf eine Voraussetzung erfüllt. (hier bezeichnet $|A|$ die Mächtigkeit einer Menge, d.h. die Anzahl an Elementen in A).

Exercise 2. Seien $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ Mengen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

Exercise 3. Die geometrische Verteilung auf $\Omega = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Parameter $p \in (0, 1)$ ist gegeben durch die Zähldichte

$$f(k) = p(1-p)^k$$

für jedes $k \geq 0$. Zeige, dass die geometrische Verteilung "gedächtnislos" ist, d.h.

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{n+k\} | \{n, n+1, \ldots\}).$$

Es darf die Identität der geometrischen Reihe verwendet werden: $\sum_{l=0}^{\infty} q^l = \frac{1}{1-q}$ *für jedes* $q \in (0, 1)$

Exercise 4. Sei X eine reelle Zufallsvariable verteilt mit Dichte

$$\rho_{r,n}(x) = (n-1) r^{n-1} x^{-n} 1_{[r,\infty)}(x)$$

für $r \geq 1, n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Bestimme den Erwartungswert, falls existent.

Exercise 5. Seien X und Y unabhängig und gleichförmig gezogen aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$. Man ziehe jetzt Parallelen zu den Koordinatenachsen durch diesen zufälligen Punkt (X, Y); damit zerlegt sich das Quadrat $[0, 1]^2$ in vier Rechtecke. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Flächeninhalt der Rechtecke R_1 mit Eckpunkt $(0, 0)$ und R_2 mit Eckpunkt $(1, 1)$ gemeinsam größer ist, als der Flächeninhalt der beiden anderen Rechtecke.

Exercise 6. Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Beweise oder widerlege:

- Für eine Folge $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ gilt $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.
- $\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ für jede Zufallsvariable X mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Exercise 7. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_n] = \mathrm{Var}[X_n] = n$ für alle $n \geq 1$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit von

$$A = \{X_n < 2n \text{ für unendlich viele } n \geq 1\}$$