

3. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematik I Diskrete Strukturen und Logik (Prof. Meinel)

Betrachten Sie folgende Aussageformen über \mathbb{N}^+ : $P(x)$: x besitzt genau drei verschiedene Primfaktoren, $Q(x)$: x ist durch das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen > 1 teilbar und $R(x)$: Die Dezimaldarstellung enthält nur Ziffern, die auf einer Digitaluhr 4 oder 5 Striche benötigen (also 2, 3, 4, 5).

7. Zählen Sie die zehn kleinsten Elemente der folgenden Mengen auf: **4 Punkte**

- (a) $M_1 := \{x \mid P(x) \wedge \neg Q(x)\}$
- (b) $M_2 := \{x \mid P(x) \vee R(x)\}$
- (c) $M_3 := \{x \mid (\neg P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x)\}$
- (d) $M_4 := \{x \mid \neg R(x) \wedge (P(x) \vee \neg Q(x))\}$

8. Zählen Sie die fünf kleinsten Elemente der folgenden Mengen **4 Punkte** auf und geben Sie eine logische Beschreibung der Mengen analog zu Aufgabe 7 an.

- (a) $M_1 \cup M_2$
- (b) $M_2 \cap \overline{M_3}$
- (c) $M_1 \setminus M_2$
- (d) $\overline{M_4 \cup M_2}$

9. Es seien m eine natürliche Zahl, $M \neq \emptyset$ eine Menge der **4 Punkte** Kardinalität m und A eine beliebige, aber fixierte Teilmenge von M . Betrachte die folgenden Mengensysteme:

- (a) $\mathfrak{M}_A := \{B \in \mathcal{P}(M) \mid B \cap A = \emptyset\}$
- (b) $\overline{\mathfrak{M}}_A := \{B \in \mathcal{P}(M) \mid B \cap A \neq \emptyset\}$
- (c) $\mathfrak{N} := \{(C, D) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \mid C \cap D = \emptyset\}$
- (d) $\overline{\mathfrak{N}} := \{(C, D) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \mid C \cap D \neq \emptyset\}$

Bestimmen Sie die Kardinalität der einzelnen Mengen.

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind zu begründen. Geben Sie ausreichende Zwischenschritte an. Lesen Sie sich den zur Bearbeitung der Aufgaben nötigen Stoff an. Nutzen Sie die Übungsaufgaben, um sich die formalen Definitionen der verwendeten Aussage(forme)n und die den Beweisschritten zugrundeliegenden Tautologien usw. zu verinnerlichen. Anschließend sollten Sie das gesamte Blatt in 60 Minuten locker lösen können.

Hinweis zu Aufgabe 9: Beachten Sie, dass es sich um allgemeine Mengen handelt. Zur Verbesserung des Verständnisses ist es hilfreich, mit konkreten Beispielen zu arbeiten, die Aufgabe soll aber allgemein gelöst werden.