Probeklausur zur Zwischenklausur vom 08.12.2008 zur Vorlesung Mathematik I - Diskrete Strukturen und Logik (Prof. Meinel)

Name:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	
Nummer:	XXX

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten
- Verwenden Sie nur das ausgeteilte Papier. Es sind keine Unterlagen oder Hilfsmittel erlaubt.
- Tragen Sie auf diesem Blatt ihren Namen, Vornamen und die Matrikelnummer ein und verwenden Sie auf den Lösungsblättern **nur** die angegebene Nummer
- Schreiben Sie mit blauer oder schwarzer Tinte. Lösungen mit Bleistift werden nicht gewertet.
- Lösen Sie die verschiedenen Klausurteile unbedingt auf verschiedenen Blättern.
- Schreiben Sie deutlich und eindeutig. Bei mehrdeutigen Lösungen wird die schlechteste Variante gewertet. Streichen Sie daher falsche Ansätze deutlich durch.
- Begründen Sie alle Aussagen und beziehen Sie sich auf die Definitionen der Vorlesung. Geben Sie alle für das Verständnis Ihrer Lösungen nötigen Zwischenschritte an.
- Betrugsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur
- Kalkulieren Sie mit einer Minute pro Punkt. Viel Erfolg!

1 Aussagenlogik **9**

1. Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass die folgende Aussage eine Kontradiktion ist. 5

$$(q \lor r) \land \neg p \land ((\neg q \rightarrow r) \Leftrightarrow p)$$

2. Formen sie die folgende Aussage logisch äquivalent so um, dass sie nur $\lor$, $\land$ und $\neg$ enthält und sich alle Negationen auf p beziehen. 4

$$(p \Leftrightarrow \neg q) \rightarrow p$$

2 Aussagenformen **10**

1. Formen Sie die folgende Aussage so um, dass Negationen nur noch direkt an die Aussagenvariablen gebunden sind. 4

$$\neg \forall x \exists y \forall z ((x \land y) \rightarrow z)$$

2. Sei $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ein Universum und $P(x, y)$ eine Aussagenform, die für $P(1, 2)$, $P(1, 3)$, $P(2, 3)$, $P(2, 1)$, $P(3, 3)$ gilt. Entscheiden Sie für die gegebenen Aussagenformen, für welche Elemente des Universums sie gelten (ohne Begründung). 6
   (a) $A(x) :\equiv \forall y (P(y, x))$
   (b) $B(x) :\equiv \exists y (P(x, y)) \rightarrow \forall y (\neg P(y, x))$
   (c) $C(x, y) :\equiv \exists z (P(x, z) \land \neg P(z, y))$

3 Mengen **16**

1. Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{c, d, e\}$ Wenden Sie auf diese Mengen drei bekannte Operationen über zwei Mengen an und bestimmen sie das jeweilige Ergebnis. 4

2. (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Potenzmenge der Menge $M = A \times B$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$. 2
   (b) Sei M eine m-elementige Menge und $A \subset M$ besitze a Elemente. Wie viele Mengen B mit $A \subset B \subset M$ gibt es? 3

3. (a) Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B, C mit $A \subseteq B$: 5

$$A \times C \subseteq B \times C$$

   (b) Geben sie je ein Beispiel für die Gleichheit und für eine echte Teilmenge an. 2

4 Relationen **25**

1. Gegeben sei die Relation $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(3,5)\}$ über $A = \{1,2,3,4,5\}$
   (a) Welche Elemente enthält $R \circ R^{-1}$. Zeichnen Sie den dazugehörenden Graphen. 3
   (b) Erweitern Sie die Relation R mit so wenigen Elementen wie möglich, so dass für die neue Relation gilt: $R = R^{-1}$ 2
   (c) Nennen und definieren Sie vier in der Vorlesung vorgestellt Eigenschaften von Relationen und prüfen Sie R auf diese Eigenschaften (ohne Beweis) 4

2. Sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. Die Relation R heißt antitransitiv, wenn für alle $a, b, c \in R$ gilt:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \notin R$$

   (a) Überprüfen Sie die Relation R aus Aufgabe 1 auf diese Eigenschaft. 2
   (b) Beweisen Sie, dass eine Relation $R \neq \emptyset$, die sowohl antitransitiv als auch symmetrisch ist, nicht reflexiv sein kann. 5

3. Sei $R \subset M \times M$ eine Relation auf $M = \{1,2,3,4,5\}$ mit $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2)\}$
   (a) Bestimmen Sie sowohl den reflexiven, als auch den transitiven Abschluss der Relation R. 4
   (b) Überprüfen Sie, ob die Vereinigung der beiden in Aufgabe (a) entstanden Relationen eine Äquivalenzrelation ist. 3
   (c) Gilt die in (b) getroffene Aussage für jede Relation R? 2