Probeklausur zur Vorlesung
Mathematik I - Diskrete Strukturen und Logik
(Prof. Meinel)

Matrikelnummer:	

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten
- Verwenden Sie nur das ausgeteilte Papier. Es sind keine Unterlagen oder Hilfsmittel erlaubt.
- Tragen Sie auf diesem Blatt **nur** ihre Matrikelnummer ein und verwenden Sie auf den Lösungsblättern ebenfalls die Matrikelnummer.
- Schreiben Sie mit blauer oder schwarzer Tinte. Lösungen mit Bleistift werden nicht gewertet.
- Lösen Sie die verschiedenen Klausurteile (I bis V) unbedingt auf verschiedenen Blättern.
- Schreiben Sie **deutlich** und **eindeutig**. Bei mehrdeutigen Lösungen wird die schlechteste Variante gewertet. Streichen Sie daher falsche Ansätze deutlich durch.
- Begründen Sie alle Aussagen und beziehen Sie sich auf die Definitionen der Vorlesung.
  Geben Sie alle für das Verständnis Ihrer Lösungen nötigen Zwischenschritte an.
- Betrugsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur
- Kalkulieren Sie mit einer Minute pro Punkt.
  Es können maximal 60 Punkte erreicht werden.
- Viel Erfolg!

1 Halbordnungen **15**

1. Nennen Sie, sofern existent, minimale und maximale Elemente der folgenden Mengen bezüglich der angegebenen Halbordnung. Entscheiden Sie außerdem, ob es sich dabei um Minimum bzw. Maximum handelt (alles ohne Begründung). 6

   (a) $\{1, 5, 10, 15\} \subset \mathbb{N}$ mit $\leq$

   (b) $(1, 2] \subset \mathbb{R}$ mit $\leq$

   (c) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $R = \Delta_M \cup \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 5), (6, 5)\}$

2. Sei $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 4), (7, 6)\}$ eine Relation über $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. 6

   (a) Erweitern Sie R zur einer Relation R^* mit so wenigen Elementen wir möglich, so dass R^* eine Halbordnung ist.

   (b) Bestimmen Sie die maximalen Ketten von R^*.

   (c) Erweitern Sie R zur einer Relation R^+ mit so wenigen Elementen wir möglich, so dass R^+ eine Ordnung ist.

3. Sei M eine Menge, $R \subset M^2$ eine Äquivalenzrelation und $S \subset M^2$ eine Ordnung. Bestimmen Sie die Relation zwischen den beiden Termen und zeigen Sie diese: 3

$$R \cap S \; \square \; \Delta_M$$

2 Funktionen **11**

1. Es sei $R \subset A \times B$ eine Relation über $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 4), (5, 6)\}$. 7

   (a) Überprüfen Sie, ob die $f = (A, B, R)$ eine Funktion ist, indem sie die benötigten Definitionen angeben und danach überprüfen.

   (b) Erweitern Sie die Relation R zur Relation R^* (unter Anpassung des Funktionsbildes durch Verwendung der Menge B) so, dass die entstandene Funktion $g = (A, B, R^*)$

      i. injektiv ist

      ii. nicht injektiv ist

   (c) Was müsste an A, B oder R geändert werden, damit es möglich ist, eine surjektive Abbildung $h = (A, B, R)$ zu konstruieren?

2. Sei A eine Menge. Weiterhin existiert eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, die injektiv ist. Zeigen Sie, dass es jeweils eine Abbildung $g : A \rightarrow A$ gibt, die: 4

(a) nicht injektiv ist
(b) nicht surjektiv ist

3 Beweistechniken **10**

1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n und alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: 5

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

2. Zeigen Sie: Wenn die letzte Ziffer einer Zahl 2, 3, 7 oder 8 ist, dann ist sie keine Quadratzahl. 5

4 Zählen **13**

1. Sei M eine endliche Menge der Kardinalität n. Bestimmen Sie die Anzahl der Funktionen $f : M \rightarrow M$, die 6

   (a) injektiv sind
   (b) surjektiv sind
   (c) bijektiv sind

2. Sei $M = \{0, 1\}$. Gegeben Sei eine Funktion $f : M \times M \rightarrow M$. Aus Performanzgründen sollen alle Funktionswerte $f((a, b))$ vorberechnet werden und in einer Tabelle abgelegt werden. 4

   (a) Wieviele Werte $f((a, b))$ müssen vorberechnet werden?
   (b) Wieviele verschiedene Funktionen f existieren?

3. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ mit maximalen Länge $n \in N$ und minimaler Länge $0 \leq k \leq n$, in denen der Buchstabe a maximal k mal vorkommt. 3

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung **12**

1. Bei der Berliner S-Bahn herrscht Chaos. Seit Monaten kommen die Züge zu spät. Ein HPI-Student braucht für seine Fahrt nach Griebnitzsee die beiden S-Bahnen S1 und S7, wobei er zuerst die S1 und dann die S7 nutzt. Beide Bahnen treffen sich in Wannsee, es kann jedoch passieren, dass eine oder beide Bahnen um 5 Minuten verspäten. Verspätet sich seine erste Bahn S1 so verpasst er damit die S7, verspäten sich jedoch beide Bahnen oder nur die S7, so schafft er es am 6

morgen noch pünktlich zur Vorlesung. Nach wochenlanger Erfahrung weiss er inzwischen, dass sich die S1 in 40% der Fälle verspätet. Außerdem weiß er, dass in der Hälfte der Fälle, wo sich die S1 verspätet hat, auch die S7 verspätet fährt. von einem Kommilitonen hat er gehört, dass die S7 insgesamt aber zuverlässiger als die S1 ist, denn sie fährt in 70 % der Fälle pünktlich.

(a) Überprüfen Sie, ob die Ereignisse, die Bahn S1 verspätet sich und die Bahn S7 verspätet sich unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Bahn S7 pünktlich fährt, wenn bereits die S1 pünktlich gewesen ist.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Verspätung, wenn sie wissen, dass er bei pünktlichen Zuügen keine Verspätung, durch die Nutzung der verspäteten S7 5 Minuten und beim Verpassen der S7 20 Minuten zu spät kommt.

2. Sei S=1,2,3,4,5,6 ein Ereignisraum und $X : S \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $S(x) = x$ die zugehörige Zufallsvariable. Konstruieren Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Ereignisraum so dass: 6

(a) X den Erwartungswert 3 und die Varianz 0 hat.

(b) X den Erwartungswert 4 und die Varianz 1 hat.

Zeigen Sie, wieso es über diesem Ereignisraum mit der angegebenen Zufallsvariablen nicht möglich ist, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu konstruieren, die den Erwartungswert 1 und die Varianz 1 hat.