Musterlösung zur Probeklausur zur Vorlesung
Mathematik I - Diskrete Strukturen und Logik
(Prof. Meinel)

Diese Musterlösung gilt ohne Gewähr. Sie soll vor allem die Ideen konstruieren und bietet dabei nicht immer die einzige Möglichkeit, eine Aufgabe zu lösen.

1 Halbordnungen **15**

1. Nennen Sie, sofern existent, minimale und maximale Elemente der folgenden 6
   Mengen bezüglich der angegebenen Halbordnung. Entscheiden Sie außerdem, ob es sich dabei um Minimum bzw. Maximum handelt (alles ohne Begründung).

   (a) $\{1, 5, 10, 15\} \subset \mathbb{N}$ mit $\leq$

   (b) $(1, 2] \subset \mathbb{R}$ mit $\leq$

   (c) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $R = \Delta_M \cup \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 5), (6, 5)\}$

   Lösung:

Aufgabe	minimales Element	maximales Element	Minimum	Maximum
a)	1	15	1	15
b)	-	2	-	2
c)	1, 4, 6	3, 5	-	-

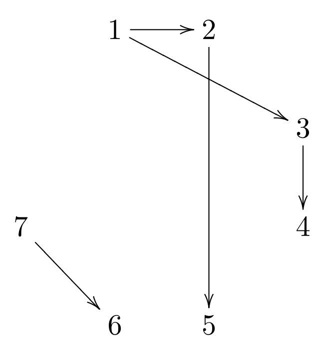
2. Sei $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 4), (7, 6)\}$ eine Relation 6
   über $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

   (a) Erweitern Sie R zur einer Relation R^* mit so wenigen Elementen wir möglich, so dass R^* eine Halbordnung ist.

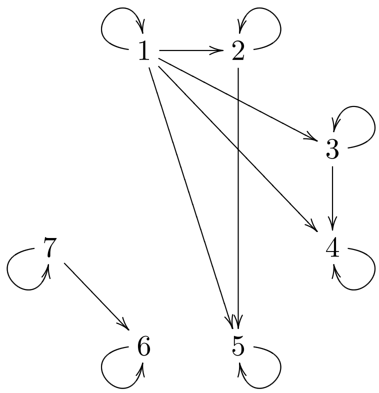
   (b) Bestimmen Sie die maximalen Ketten von R^*.

   (c) Erweitern Sie R zur einer Relation R^+ mit so wenigen Elementen wir möglich, so dass R^+ eine Ordnung ist.

   Lösung: Der Graph von R sieht wie folgt aus:

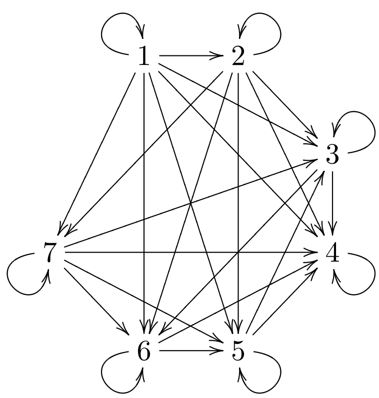


   Dieser Graph muss nun so zu R^* erweitert werden, dass er reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.



Die maximalen Ketten von R^* sind dann: $K_1 = \{1, 2, 5\}$, $K_2 = \{1, 3, 4\}$ und $K_3 = \{6, 7\}$.

Dieser Graph R^* muss nun so zu R^+ erweitert werden, dass er total, reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.



3. Sei M eine Menge, $R \subset M^2$ eine Äquivalenzrelation und $S \subset M^2$ eine Ordnung. Bestimmen Sie die Relation zwischen den beiden Termen und zeigen Sie diese: 3

$$R \cap S \;\square\; \Delta_M$$

Lösung:

Beispiel:
Sei $M = \{a, b\}$ und $R = M \times M$ die Allrelation über M und $S = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ eine Halbordnung.
Dann ist $R \cap S = \{(a, a), (b, b), (a, b)\} \supset \Delta_M$

Vorraussetzungen:
(1) $\Delta_M = \{(x, x) | x \in M\}$
(2) R und S sind reflexiv z.z. $\Delta_M \subseteq R \cap S$

Beweis:
Aus (1) folgt: $\forall (x,y) \in \Delta_M : x \in M \wedge x = y$
Aus (2) folgt: $\forall x \in M : (x,x) \in R \wedge (x,x) \in S$
Sei $(x,y) \in \Delta_M$
$\Rightarrow x \in M \wedge x = y$, nach Vorraussetzung (1)
$\Rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in S$, nach Vorraussetzung (2)

Hinweis: Diese Aufgabe sollte eigentlich wie folgt lauten: Sei M eine Menge, $\mathcal{R}_M$ die Menge aller Äquivalenzrelationen über M und $\mathcal{S}_M$ die Menge alle Halbordnungen über M. Zeigen Sie das gilt:

$$\mathcal{R}_M \cap \mathcal{S}_M = \{\Delta_M\}$$

2 Funktionen **11**

1. Es sei $R \subset A \times B$ eine Relation über $A = \{1,2,3,4,5\}$ und $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ mit $R = \{(1,3),(2,2),(3,4),(5,6)\}$. 7

   (a) Überprüfen Sie, ob die $f = (A,B,R)$ eine Funktion ist, indem sie die benötigten Definitionen angeben und danach überprüfen.

   (b) Erweitern Sie die Relation R zur Relation R^* (unter Anpassung des Funktionsbildes durch Verwendung der Menge B) so, dass die entstandene Funktion $g = (A,B,R^*)$

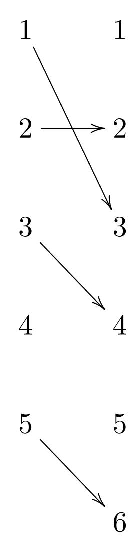
      i. injektiv ist

      ii. nicht injektiv ist

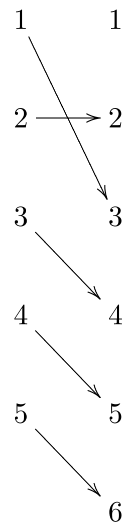
   (c) Was müsste an A, B oder R geändert werden, damit es möglich ist, eine surjektive Abbildung $h = (A,B,R)$ zu konstruieren?

Lösung:

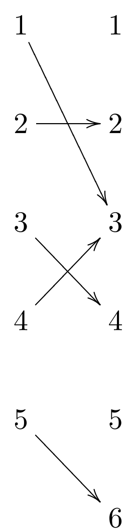
Die Relation ist:



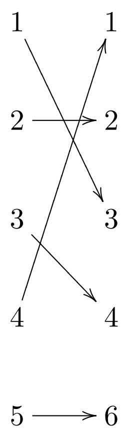
Eine injektive Abbildung ist:



Eine nicht injektive Abbildung ist:



Damit die Abbildung surjektiv werden kann, muss die Kardinalität von B kleiner sein als die Kardinalität von A sein. Dafür kann beispielsweise die Menge B um das Element 5 vermindert werden. Dann ist folgende Funktion möglich:



2. Sei A eine Menge. Weiterhin existiert eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, die injektiv ist. Zeigen Sie, dass es jeweils eine Abbildung $g : A \rightarrow A$ gibt, die: 4

   (a) nicht injektiv ist

   (b) nicht surjektiv ist

   Lösung:

   Existiert eine Abbildung f von $\mathbb{N}$ nach A, so exsitieren zwei Bidler $f(1)$ und $f(2)$. Da f injektiv ist, gilt: da $2 \neq 1$ folgt $f(1) \neq f(2)$.
   Sei nun $a = f(1)$ und $b = f(2)$

   Definiere eine Abbildung g von A nach A mit $g(x) = a$ für alle $x \in A$
   z.z. $g : A \rightarrow A$ mit g ist nicht injektiv
   Es gilt $g(a) = a = g(b) \rightarrow a = b$ ist ein Widerspruch zu $a \neq b$
   $\rightarrow g$ ist nicht injektiv

   z.z. $g : A \rightarrow A$ mit g ist nicht surjektiv
   Es gilt $g(A) = \{a\} \subset A$, da auch $b \in A$ und $a \neq b$
   $\rightarrow g$ ist nicht surjektiv

3 Beweistechniken **10**

1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n und alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: 5

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

   Lösung:

   z.z. $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+ : (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$
   Beweis durch vollständige Induktion über n
   IA: Sei $n = 0$
   $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$
   IS:

IV: Gelte $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$ für ein beliebiges aber fixiertes $n \in \mathbb{N}$
z.z. $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot x$
Beweis:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \text{ nach IV und da } x \geq 0 \\
&\geq (1+n\cdot x)\cdot(1+x) \text{ aus multiplizieren} \\
&= 1+n\cdot x+x+n\cdot x^2 \text{ da } x \geq 0 \text{ und } n \geq 0 \\
&\geq 1+n\cdot x+x\text{Ausklammern} \\
&= 1+(n+1)\cdot x
\end{aligned}$$

2. Zeigen Sie: Wenn die letzte Ziffer einer Zahl 2, 3, 7 oder 8 ist, dann ist sie keine Quadratzahl. 5

Vorraussetzung: $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}, a \in \{0,\ldots,9\} n = 10\cdot k + a$
z.z. Wenn $n = 10k + a$ und $a \in \{2,3,7,8\}$, dann existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $m^2 = n$
Beweis durch Kontraposition:
b.z.z.Wenn $n = 10k + a$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m^2 = n$existiert, dann ist $a \notin \{2,3,7,8\}$
Sei $m = 10l + b$ mit $b \in \{0,\ldots,9\}$
Dann ist $m^2 = (10l+b)^2 = (100l^2 + 20lb + b^2) = 10(10l+2lb) + b^2$
Sei $(10l + 2lb) = s, b^2 = z \rightarrow m^2 = 10s + z$
Damit hat nur noch $b^2 = z$ Einfluss auf die letzte Stelle.
Führen eine Fallunterscheidung über b aus:
$b = 0$: $b^2 = 0 \rightarrow z \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 1$: $b^2 = 1 \rightarrow z \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 2$: $b^2 = 2 \rightarrow z \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 3$: $b^2 = 9 \rightarrow z \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 4$: $b^2 = 16 = 10 + 6$, dann wird die 10 dem $10s$ zugeschlagen und somit ein $z' = z - 10$ erzeugt $\rightarrow z' \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 5$: $b^2 = 25 = 20 + 5$, dann wird die 20 dem $10s$ zugeschlagen und somit ein $z' = z - 20$ erzeugt $\rightarrow z' \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 6$: $b^2 = 36 = 30 + 6$, dann wird die 30 dem $10s$ zugeschlagen und somit ein $z' = z - 30$ erzeugt $\rightarrow z' \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 7$: $b^2 = 69 = 40 + 9$, dann wird die 40 dem $10s$ zugeschlagen und somit ein $z' = z - 40$ erzeugt $\rightarrow z' \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 8$: $b^2 = 64 = 60 + 4$, dann wird die 60 dem $10s$ zugeschlagen und somit ein $z' = z - 60$ erzeugt $\rightarrow z' \notin \{2,3,7,8\}$
$b = 9$: $b^2 = 91 = 80 + 1$, dann wird die 80 dem $10s$ zugeschlagen und somit ein $z' = z - 80$ erzeugt $\rightarrow z' \notin \{2,3,7,8\}$

$\Rightarrow$ Für alle Fälle liegt die Endung der natürlichen zahl nie in $\{2,3,7,8\}$. Die Kontraposition wurde gezeigt, die ursprüngliche Aussage stimmt, daher.

4 Zählen **13**

1. Sei M eine endliche Menge der Kardinalität n. Bestimmen Sie die Anzahl der Funktionen $f : M \to M$, die 6

   (a) injektiv sind

   (b) surjektiv sind

   (c) bijektiv sind

   Lösung:

   Wie man leicht sieht, ist die Lösung immer $n!$. Von daher wird der kompliziertere Fall $f : A \to B$ angenommen. mit $\#A = m, \#B = n$

   Für injektiv gilt dann (wenn $\#A \leq \#B$, ansonsten 0): $n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, da das erste Element, sich n Funktionsbilder aussuchen kann, das zweite sich nur noch $n-1$ Bilder, usw.

   Für surjektiv gilt dann (wenn $\#A \geq \#B$, ansonsten 0): $n^m - \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (n-i)^m$. Das sind alle möglichen Funktionen abzüglich der Funktionen die auf Untermengen von B abbilden.

   Für bijektiv gilt dann (wenn $\#A = \#B$, ansonsten 0): $n!$, da nur gleichmächtige Mengen bijektive Abbildungen haben und dann jede Abbildung die bijektiv ist, auch injektiv ist.

2. Sei $M = \{0, 1\}$. Gegeben Sei eine Funktion $f : M \times M \to M$. Aus Performanzgründen sollen alle Funktionswerte $f((a, b))$ vorberechnet werden und in einer Tabelle abgelegt werden. 4

   (a) Wieviele Werte $f((a, b))$ müssen vorberechnet werden?

   (b) Wieviele verschiedene Funktionen f existieren?

   Lösung:

   a) Es müssen für alle möglichen Urbilder Werte berechnet werden, also: $\#(M \times M) = \#M \cdot \#M = 2 \cdot 2 = 4$
   b) Es existieren genau $\#M^{\#(M \times M)}$ Funktionen, also $2^{2 \cdot 2} = 16$

3. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ mit maximalen Länge $n \in N$ und minimaler Länge $0 \leq k \leq n$, in denen der Buchstabe a maximal k mal vorkommt. 3

   Lösung:

   Es existieren $\binom{i}{j}$ Wörter der Länge i mit maximal genau j mal a. Wenn nun alle Wörter der Länge i mit $0 - k$ mal a gezählt werden, so sind dies $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{i}{j}$. Wenn nun alle Wörter der Länge k bis n gesucht werden, dann sind dies $\sum\limits_{i=k}^{n} \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{i}{j}$.

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung **12**

1. Bei der Berliner S-Bahn herrscht Chaos. Seit Monaten kommen die Züge zu spät. Ein HPI-Student braucht für seine Fahrt nach Griebnitzsee die beiden S-Bahnen S1 und S7, wobei er zuerst die S1 und dann die S7 nutzt. Beide Bahnen treffen sich in Wannsee, es kann jedoch passieren, dass eine oder beide Bahnen um 5 Minuten verspäten. Verspätet sich seine erste Bahn S1 so verpasst er damit die S7, verspäten sich jedoch beide Bahnen oder nur die S7, so schafft er es am morgen noch pünktlich zur Vorlesung. Nach wochenlanger Erfahrung weiss er inzwischen, dass sich die S1 in 40% der Fälle verspätet. Außerdem weiß er, dass in der Hälfte der Fälle, wo sich die S1 verspätet hat, auch die S7 verspätet fährt. von einem Kommilitonen hat er gehört, dass die S7 insgesamt aber zuverlässiger als die S1 ist, denn sie fährt in 70 % der Fälle pünktlich. 6

   (a) Überprüfen Sie, ob die Ereignisse, die Bahn S1 verspätet sich und die Bahn S7 verspätet sich unabhängig sind.

   (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Bahn S7 pünktlich fährt, wenn bereits die S1 pünktlich gewesen ist.

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Verspätung, wenn sie wissen, dass er bei pünktlichen Zügen keine Verspätung, durch die Nutzung der verspäteten S7 5 Minuten und beim Verpassen der S7 20 Minuten zu spät kommt.

   Lösung:

   Das Ereignis $S1$ bedeutet, dass sich die S1 verspätet, das Ereignis $S7$ bedeutet, dass sich die S7 verspätet. Nutzung einer 4-Felder-Tafel:

	$S1$	$\overline{S1}$	
$S7$	20%	10 %	30%
$\overline{S7}$	20%	50%	70%
	40%	60%	100%

   Die Ereignisse sind nicht unabhängig, da: $Prob(S1) \cdot Prob(S7) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \neq 0,2 = Prob(S1 \cap S7)$

   $Prob(\overline{S7}|\overline{S1}) = \frac{Prob(\overline{S7} \cap \overline{S1})}{Prob(\overline{S1}}) = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass die S7 pünktlich ist, wenn die S1 pünktlich war, beträgt $\frac{5}{6}$.

   Definiere eine Zufallsvariable $X : S \to \mathbb{R}$ mit $X((S1, S7)) = 5$, $X((\overline{S1}, S7)) = 5$, $X((S1, \overline{S7})) = 20$ und $X((\overline{S1}, \overline{S7})) = 0$

   Dann ist der Erwartungswert $E[X] = \sum_{e \in X(S)} e \cdot Prob[X = e] = 20 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 = 5,5$

2. Sei S=1,2,3,4,5,6 ein Ereignisraum und $X : S \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $S(x) = x$ die zugehörige Zufallsvariable. Konstruieren Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Ereignisraum so dass: 6

   (a) X den Erwartungswert 3 und die Varianz 0 hat.

   (b) X den Erwartungswert 4 und die Varianz 1 hat.

Zeigen Sie, wieso es über diesem Ereignisraum mit der anegegeben Zufallsvariable nicht möglich ist, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu konstruieren, die den Erwartungswert 1 und die Varianz 1 hat.

Lösung:

s	1	2	3	4	5	6
Prob(s)	0	0	1	0	0	0

Dann ist $E[X] = \sum_{e \in X(S)} eProb[X = e] = 3 \cdot 1 = 3$

und $VAR[X] = \sum_{e \in X(S)} (e - E[X])^2 Prob[X = e] = 0$

s	1	2	3	4	5	6
Prob(s)	0	0	0,5	0	0,5	0

Dann ist $E[X] = \sum_{e \in X(S)} eProb[X = e] = 3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5 = 4$

und $VAR[X] = \sum_{e \in X(S)} (e - E[X])^2 Prob[X = e] = (3-4)^2 \cdot 0,5 + (5-4)^2 \cdot 0,5 = 1$

Für den Erwartungswert 1 gibt es nur eine mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, nämlich:

s	1	2	3	4	5	6
Prob(s)	1	0	0	0	0	0

Alle anderen Verteilungen haben einen Erwartunsgwert > 1. Diese Verteilung hat aber die Varianz 0.