Universität Trier
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Meinel/Klotz (`klotz@ti.uni-trier.de`)

Aufgabenblatt 10

Abgabetermin: Freitag, 23. Jänner 2004, 14:00
Erreichbare Punkte: 12

URL: http://www.informatik.uni-trier.de/TI/Lehre/2003-2004/dsl/blatt10.ps (blatt10.pdf)

Themen: Kardinalität, Beweismethoden

Beachten Sie auch die Rückseite des Blattes
Bitte besuchen Sie *regelmäßig* die Seite zur Übung und Vorlesung:

`http://www.informatik.uni-trier.de/TI/Lehre/2003-2004/DisStrukLog.html`

Aufgabe 1: 6+1 Punkte

Es gilt folgender Satz von Cantor-Schröder-Bernstein: Es seinen M und N Mengen. Es gebe eine injektive Abbildung $f : M \to N$ und eine injektive Abbildung $g : N \to M$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $h : M \to N$.
Benutzen Sie diesen Satz, um zu zeigen, dass folgende Mengen gleichmächtig sind (d.h. es müssen "nur" zwei injektive Abbildungen angegeben werden):

1. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$,
2. $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ und $P(\mathbb{N})$.

Hinweis: Bei Aufgabe (1.1) soll *nicht* die Cantor'sche Diagonalisierung benutzt werden.
Die Aufgaben können durch eine eindeutige Darstellung der Zahlen gelöst werden.
Das Intervall $[0, 1)$ beschreibt die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.
Zusatzpunkt: Wie kann Aufgabe (1.2) ausgenutzt werden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ und $P(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind?

Aufgabe 2: 2 Punkte

Sei $f = (A, B, F)$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die zu f inverse Abbildung f^{-1} ist eine bijektive Abbildung.
2. $(f^{-1})^{-1} = f$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) Beweisen Sie mittels der Methode des *direkten* Beweises folgende Behauptung:

Falls a ein Vielfaches von 3 und b ein Vielfaches von 2 ist, dann ist a^b ein Vielfaches von 9.

(b) Beweisen Sie mittels der Methode des *indirekten* Beweises (Beweis durch Kontraposition) folgende Behauptung:

Falls $a \cdot b$ gerade ist, dann ist a gerade oder b gerade.

(c) Beweisen Sie die gleiche Behauptung wie in (b) durch einen Widerspruchs-Beweis.

Hinweis: Die richtige Anwendung der verschiedenen Beweismethoden bildet den Kern der Aufgabenstellung.