Universität Trier
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Meinel/Klotz (`klotz@ti.uni-trier.de`)

Aufgabenblatt 7

Abgabetermin: Freitag, 19. Dezember 2003, 14:00
Erreichbare Punkte: 16

URL: http://www.informatik.uni-trier.de/TI/Lehre/2003-2004/dsl/blatt7.ps (blatt7.pdf)

Themen: Äquivalnezrelationen, Klasseneinteilung

Dies ist das erste Blatt der zweiten Semesterhälfte. Vor Weihnachten wird noch das 8. Übungsblatt ausgegeben, welches bis zum 09.01.04 bearbeitet werden muss.
Bitte besuchen Sie *regelmäßig* die Seite zur Übung und Vorlesung:

`http://www.informatik.uni-trier.de/TI/Lehre/2003-2004/DisStrukLog.html`

Beachten Sie auch die Rückseite des Blattes.

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei die Relation R über der Menge aller Studenten folgend definiert:

$$xRy \text{ gdw. } x \text{ und } y \text{ haben mindestens eine Vorlesung gemeinsam besucht.}$$

Handelt es sich bei dieser Relation um eine Äquivalenzrelation? Falls nicht, wie könnte man die Definition der Relation abändern, um eine Äquivalenzrelation zu erhalten.
Begründen Sie Ihre Antworten, wobei die drei Eigenschaften der Äquivalenzrelation getrennt zu behandeln sind (z.B. R ist (nicht) (reflexiv, symmetrisch, transitiv), da …).

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei A die Menge $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Die Relation $S \subseteq A \times A$ sei gegeben durch:

$$xSy \text{ gdw. } x \text{ und } y \text{ sind ein Vielfaches von 2 oder } x = y.$$

Weiters sei Z folgende Zerlegung von A: $Z = \{\{1, 5, 9\}, \{4, 8\}, \{7, 3\}, \{2, 6, 10\}\}$.

1. Ist S eine Äquivalenzrelation? (mit Begründung der Aussage)
2. Geben Sie die Zerlegung Z_S von A an, die durch S definiert wird.
3. Welche Äquivalenzrelation wird durch die Zerlegung Z von A definiert?

Aufgabe 3: 4 Punkte

Auf $\mathbb{N}_0$ sei R die Äquivalenzrelation

$$xRy \text{ genau dann, wenn } (y \bmod 3) = (x \bmod 3).$$

Wieviele R umfassende Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}_0$ gibt es?

Hinweis:

- Es müssen nur echt größere Äquivalenzrelationen T_i gezählt werden mit $R \subset T_i$.
- Eine triviale, R umfassende Äquivalenzrelation ist die Allrelation $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
- Jede Äquivalenzrelation führt zu einer Klasseneinteilung der Menge $\mathbb{N}_0$ (und umgekehrt). **Betrachten Sie daher die Klasseneinteilung von $\mathbb{N}_0$, welche durch R gegeben ist (dies ist auch gleichzeitig eine Teilaufgabe).** Daraus können alle umfassenden Äquivalenzreationen abgeleitet werden.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Welche Eigenschaften haben folgende Relationen? Handelt bei der Relation $R_1 \ldots R_4$ um eine Äquivalenzrelation, um eine Halbordnungsrelation, um eine Ordnungsrelation oder ist es keine entsprechende Relation?

1. R_1 sei eine Relation über der Menge aller Menschen, definiert durch: xR_1y genau dann, wenn x ist Vorfahre von y. (Es wird angenommen, dass jeder Mensch sein eigener Vorfahre ist).
2. R_2 sei eine Relation über der Menge aller Relationen, definiert durch: xR_2y genau dann, wenn x eine Äquivalenzrelation und y eine Ordnungsrelation ist.
3. R_3 sei eine Relation über alle Fahrzeuge, definiert durch: xR_3y genau dann, wenn x hat mindestens gleich viele Einzelteile wie y.
4. Sei R_4 eine Relation über die Menge aller Autos auf dem Parkplatz der Uni. Zwei Autos stehen in Relation R_4 gdw. der erste Buchstabe auf dem Kennzeichen gleich ist.