Matthias Quasthoff
http://www.hpi.uni-potsdam.de/∼meinel/teaching/

Wintersemester 2011/12
Abgabe bis 20.12. 10:50 Uhr

6. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematik I – Diskrete Strukturen und Logik (Prof. Meinel)

19. Prüfen Sie folgende Mengen auf maximale und minimale Elemente, obere und untere Schranken, Supremum und Infimum und Maximum und Minimum bezüglich der angegebenen Halbordnung (ohne Begründung.) Jeweils 1 Punkt

    (a) $[0,\,1) \subset \mathbb{R}$ bezüglich $\leq$

    (b) $\mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ für eine nichtleere Menge M bezüglich $\subseteq$

    (c) $\{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}_0 \wedge 1 \leq a + b \leq 4\} \subseteq \mathbb{N}$ bezüglich Teilbarkeit

    (d) Eine Familie bestehend aus zwei Kindern k_1, k_2, einem Elternpaar e_1, e_2, zwei Großelternpaaren g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22} und einem Enkel e von k_1 bezüglich „ist dieselbe Person oder Vorfahre von.“ Die Familie sei gleichzeitig das betrachtete Universum.

20. Seien A, B nichtleere Mengen und $F \subseteq A \times B$. Jeweils 1 Punkt

    (a) Beweisen Sie, dass F^{-1} genau dann linksvollständig ist, wenn F rechtsvollständig ist und F^{-1} genau dann rechtseindeutig ist, wenn F linkseindeutig ist.

    (b) Schlussfolgern Sie weiter, dass $f' := (B, A, F^{-1})$ Abbildung ist, wenn F rechtsvollständig und linkseindeutig ist.

    (c) Sei F links- und rechts- jeweils -vollständig und -eindeutig, $f = (A, B, F)$ und $f' = (B, A, F^{-1})$. Zeigen Sie für alle $x \in A$, dass $f'(f(x)) = x$ gilt.

    (d) Sei F linksvollständig und rechtseindeutig, $f = (A, B, F)$ und $M \subseteq N \subseteq A$. Zeigen Sie $f(M) \subseteq f(N)$.

21. Seien wieder A und B nichtleere Mengen und $f : A \to B$ Abbildung. Jeweils 2 Punkte
    Für $a, b \in A$ gelte $a \sim b$ gdw. $f(a) = f(b)$.

    (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ Äquivalenz ist.

    (b) Zeigen Sie $f^{-1}(f(a)) = [a]$ für alle $a \in A$.

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind zu begründen. Weitreichende Umformungen ohne Zwischenschritte können nicht gewertet werden.

Beweise werden zumeist in mündlicher Form gefordert – trotzdem stecken hinter der Voraussetzung („Sei ... “) und der Behauptung („Zeigen Sie ... “) jeweils formale Definitionen. Schreiben Sie sich diese zunächst auf. Anschließend sollten Sie durch das Heranziehen geeigneter Sätze und Definitionen die Behauptung schnell aus den Voraussetzungen folgern können.

Beachten Sie ausserdem, dass die geforderte Exaktheit Ihrer Begründungen bis zum Semesterende schnell steigen wird. Verwenden Sie also die exakten Definitionen und vergessen Sie keine Voraussetzungen bei der Anwendung von Sätzen.

Hinweis zu 20: Insgesamt folgt aus (a)-(c), dass f genau dann eine Umkehrfunktion besitzt, wenn f injektiv und surjektiv, also bijektiv ist.