Matthias Quasthoff
http://www.hpi.uni-potsdam.de/~meinel/teaching/

Wintersemester 2011/12
Abgabe bis 10.1. 10:55 Uhr
im Postfach 53, HPI-Foyer

7. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematik I – Diskrete Strukturen und Logik (Prof. Meinel)

23. Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ Abbildung $A \to C$.

    (a) Zeigen Sie f und g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv — 2 Punkte

    (b) Zeigen Sie f und g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv — 2 Punkte

    (c) Schlussfolgern Sie in höchstens zwei Zeilen natürlicher Sprache Satz 5.7 (3), d. h. f und g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv. — 1 Punkt

24. Konstruieren Sie eine Surjektion $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$. — 3 Punkte
    Mutmaßen Sie, ob Ihr f injektiv ist. — ohne Bewertung

25. Sei $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die alle Primzahlen injektiv aufzählt, und

    $$N := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} | \exists n \in \mathbb{N}\, \forall i > n : a_i = 0\}$$

    die Menge aller unendlichen natürlichen Folgen, die ab einer Stelle null sind. Sie können nun jede Folge $\overline{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in N$ mit wie folgt auf eine natürliche Zahl abbilden:

    $$f : \overline{a} \mapsto \prod_{i\in\mathbb{N}} p_i^{a_i}$$

    Zeigen Sie, dass $f : N \to \mathbb{N}^+$

    (a) injektiv ist. — 2 Punkte

    (b) surjektiv ist. — 2 Punkte

    Damit ist f bijektiv und N abzählbar.

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind zu begründen. Geben Sie ausreichende Zwischenschritte an. Lesen Sie sich den zur Bearbeitung der Aufgaben nötigen Stoff an. Anschließend sollten Sie das gesamte Blatt in 60 bis 90 Minuten lösen können.

Hinweis zu 24: Sie können verwenden, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in [0, 1]$ eine Darstellung $x = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} a_i$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ gibt, die Binärdarstellung $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ des unendlichen Bruchs. Sie müssen also nur für $M \subseteq \mathbb{N}$ die passenden a_i definieren und zeigen, dass Ihre Abbildung surjektiv ist.

Hinweis zu 25: Sie können verwenden, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ eine eindeutige Primzahlzerlegung existiert, d. h. eine Menge $\{p_1, \ldots, p_\ell\}$ von Primzahlen und Exponenten $a_1, \ldots, a_\ell \neq 0$ mit $n = p_1^{a_1} \cdots p_\ell^{a_\ell}$.